17. Ordinallerin Cantor Normal Biçimi

Bilindiği gibi, sayıları genelde,

$$3546 = 3\times10^3 + 5\times10^2 + 2\times10^1 + 6\times10^0$$

gibi onluk tabanda yazarız. Aynı sayıyı başka tabanlarda da yazabiliriz. Örneğin 11 tabanında,

$$3546 = 2\times11^3 + 7\times11^2 + 3\times11^1 + 4\times11^0$$

dır. Aynı şeyi 10 ya da 11 yerine herhangi bir $p > 1$ doğal sayısı için de yapabiliriz: Her n doğal sayısı, her

$$a_0, ..., a_k \in \{0, 1, ..., p-1\}, a_k \neq 0$$

için,

$$n = a_kp^k + \cdots + a_0p^0$$

toplamı biçiminde tek bir biçimde yazılır. Buna n'nin ***p* tabanında yazılımı** adı verilir.

On parmağımız olduğundan 10 tabanı önemlidir. Bilgisayarlar sayesinde 2 tabanı da önemlidir. Saat ve dereceler de 60 tabanına belli bir önem kazandırır.

Bu bölümde benzer şeyi ordinaller için yapacağız, p doğal sayısı yerine herhangi bir $\alpha > 1$ ordinali alacağız ve her β ordinalinin "α'lık tabanda" tek bir biçimde yazabileceğini göreceğiz. İşte teorem:

Teorem 17.1. $1 < \alpha$ *ve* $0 < \beta$ *iki ordinal olsun. O zaman,*
- *bir* k *doğal sayısı,*
- $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_k$ *ve*
- $0 < \delta_i < \alpha$ $(1 \le i \le k)$ *ordinalleri için,* β *ordinali*

$$\beta = \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_2}\delta_2 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k$$

olarak yazılır. Ayrıca bu koşulları sağlayan k, γ_i ve δ_i $(1 \le i \le k)$ *biriciktir.*

Teoremi, α'yı sabit tutup β üzerine tümevarımla kanıtlayacağız.

Önsav 17.2. *Eğer* $1 < \alpha$, $\gamma_1 > \ldots > \gamma_k$ *ve* $0 < \delta_i < \alpha$ *ise, o zaman*

$$\alpha^{\gamma_1} \le \alpha^{\gamma_1}\delta_1 \le \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k < \alpha^{\gamma_1}(\delta_1 + 1) \le \alpha^{\gamma_1+1}.$$

Kanıt: İlk iki eşitsizlik ve sonuncusu bu aşamada kolay olmalı. Üçüncüsü olan

$$\alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k < \alpha^{\gamma_1}(\delta_1 + 1)$$

eşitsizliğini k üzerine tümevarımla kanıtlayalım.

Eğer $k = 1$ ise $\alpha^{\gamma_1}\delta_1 < \alpha^{\gamma_1}(\delta_1 + 1)$ eşitsizliği kanıtlanmalı ki bu da bariz.

Şimdi $k > 1$ olsun. Önceki bölümlerde kanıtladığımız sonuçları kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_2}\delta_2 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k &= \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + (\alpha^{\gamma_2}\delta_2 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k)\\ &< \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_2+1} \le \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_1} = \alpha^{\gamma_1}(\delta_1 + 1). \quad \square\end{aligned}$$

Sonuç 17.3. *Eğer* β *ordinali teoremdeki gibi yazılırsa, o zaman* γ_1, $\alpha^\gamma \le \beta$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük* γ *ordinalidir ve* δ_1, $\alpha^\gamma\delta \le \beta$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük* δ *ordinalidir.*

Eğer teorem doğruysa, γ_1 ve δ_1 yukardaki sonuçtaki gibi olmak zorunda olduklarından, bu özelliği sağlayan γ_1 ve δ_1 ordinallerinin varlıklarını kanıtlamalıyız:

Önsav 17.4. $1 < \alpha$ *ve* $0 < \beta$ *iki ordinal olsun. O zaman* $\alpha^\gamma \leq \beta$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük bir* γ *ordinali ve* $\alpha^\gamma\delta \leq \beta$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük bir* δ *ordinali vardır.*

Kanıt: $\alpha^\gamma \leq \beta$ eşitsizliğini sağlayan tüm γ ordinallerin topluluğu bir küme olduğundan (okura alıştırma), bu ordinallerin bileşimi de bir ordinaldir (Teorem 10.10) ve aynı eşitsizliği sağlar (Önsav 16.3.ii); dolayısıyla bu bileşim

$$\alpha^\gamma \leq \beta$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük γ ordinalidir.

$$\alpha^\gamma\delta \leq \beta$$

eşitsizliğini sağlayan tüm δ ordinaller topluluğu da bir küme olduğundan (okura alıştırma), bu ordinallerin bileşimi de bir ordinaldir ve aynı eşitsizliği sağlar (Önsav 14.8), dolayısıyla bu bileşim

$$\alpha^\gamma\delta \leq \beta$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük δ ordinalidir. □

Teorem 17.1'in Kanıtı: Artık teoremi kolaylıkla kanıtlayabiliriz. α ve β teoremde söylendiği gibi olsun. γ_1 ve δ_1 yukardaki önsavdaki gibi olsun. β_1,

$$\beta = \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \beta_1$$

eşitliğini sağlayan biricik ordinal olsun. Elbette $\beta_1 < \alpha^{\gamma_1}$, çünkü aksi takdirde

$$\beta = \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \beta_1 \geq \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_1} = \alpha^{\gamma_1}(\delta_1 + 1);$$

ama δ, $\alpha^\gamma\delta \leq \beta$ eşitsizliğini sağlayan en büyük ordinaldi, çelişki. Demek ki $\beta_1 < \alpha^{\gamma_1} \leq \beta$. Şimdi tümevarımla teoremdeki koşulları sağlayan endisli γ ve δ ordinalleri için,

$$\beta_1 = \alpha^{\gamma_2}\delta_2 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k.$$

Önsav 17.2'den dolayı, $\alpha^{\gamma_2} \leq \beta_1 < \alpha^{\gamma_2+1} < \alpha^{\gamma_1}$ ve Teorem 16.2'ye göre $\gamma_2 < \gamma_1$. □

$\alpha = \omega$ ise δ'lar doğal sayı olmak zorunda olduklarından, bu sonuç $\alpha = \omega$ için daha dikkat çekicidir:

Teorem 17.5 [Ordinallerin Cantor Normal Biçimi]. $0 < \beta$ *bir ordinal olsun. O zaman,*

- *bir k doğal sayısı,*
- $\gamma_1 > \gamma_2 > ... > \gamma_k$ *ordinalleri ve*
- $n_1, n_2, ..., n_k$ *pozitif doğal sayıları için,*

$$\beta = \omega^{\gamma_1} n_1 + \omega^{\gamma_2} n_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k$$

olarak yazılır. Ayrıca bu koşulları sağlayan k, γ_i ve n_i $(1 \le i \le k)$ *biriciktir.*

Aynı olguyu şöyle de söyleyebiliriz:

Teorem 17.5′ [Ordinallerin Cantor Normal Biçimi]. $0 < \beta$ *bir ordinal olsun. O zaman,*

- *bir k doğal sayısı,*
- $\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge ... \ge \gamma_k$ *ordinalleri için,*

$$\beta = \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots + \omega^{\gamma_k}$$

olarak yazılır. Ayrıca bu koşulları sağlayan k ve γ_i $(1 \le i \le k)$ *biriciktir.*

Ordinalleri Cantor normal biçimiyle toplayıp çarpmak oldukça pratiktir. Yazının geri kalan bölümünde bu pratiği öğreneceğiz. Önce toplamanın üstesinden gelelim. Teoremlerimizi ω tabanı için kanıtlayacağız.

17.1. Toplama

Teorem 17.6. $\gamma_1 > \gamma_2 > ... > \gamma_k$ *ve* $\delta_1 > \delta_2 > ... > \delta_\ell$ *ordinal olsunlar.* $n_1, n_2, ..., n_k$ *ve* $m_1, m_2, ..., m_\ell$ *pozitif doğal sayı olsunlar. O zaman, eğer* i, $\gamma_i \ge \delta_1$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük göstergeç (endis) ise*

$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k) + (\omega^{\delta_1} m_1 + \cdots + \omega^{\delta_\ell} m_\ell)$$
$$= \omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i} n_i + \omega^{\delta_1} m_1 + \cdots + \omega^{\delta_\ell} m_\ell$$

olur.

Kanıt: Eğer $\gamma < \delta$ ise $\omega^\gamma n + \omega^\delta m = \omega^\delta m$ eşitliğini kanıtlamak yeterli. $\gamma < \delta$ olsun. Teorem 16.2'den dolayı $\omega^\gamma < \omega^\delta$. Teorem 16.5'ten dolayı, $\omega^\gamma + \omega^\delta = \omega^\delta$'dir. n ile çarpma n kez toplama olduğundan kanıt bitmiştir! □

Demek ki $\alpha + \beta$ toplamını bulmak için α ve β'yı Cantor normal biçiminde yazıp α'nın kuyruğundaki küçük terimleri atıp β'yı bu kısaltılmış α'nın sonuna olduğu gibi eklemeli.

17.2. Çarpma

Şimdi çarpmaya gelelim. Çarpma toplama kadar kolay değil, ama çok da zor değil.

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k$$

ve

$$\beta = \omega^{\delta_1} m_1 + \cdots + \omega^{\delta_\ell} m_\ell$$

çarpmak istediğimiz ve Cantor normal biçimde yazılmış iki ordinal olsun. Cantor normal biçimde yazılmış ordinalleri toplamayı bildiğimizden ve soldan dağılmadan dolayı (Önsav 14.2),

$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^\delta m$$

çarpımını bilmemiz yeterli. Hatta $m = 1$ bile alabiliriz. Demek ki,

$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^\delta$$

çarpımını bulmalıyız. $\delta = 0$ ise çarpımın ne olması gerektiği belli. $\delta > 0$ durumuna yoğunlaşmalıyız. Önsav 17.2'den dolayı,

$$\begin{aligned}\omega^{\gamma_1+\delta} = \omega^{\gamma_1}\omega^\delta &\le (\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^\delta \\ &\le \omega^{\gamma_1+1}\omega^\delta = \omega^{(\gamma_1+1)+\delta} = \omega^{\gamma_1+(1+\delta)},\end{aligned}$$

yani

$$\omega^{\gamma_1+\delta} \le (\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^\delta \le \omega^{\gamma_1+(1+\delta)}.$$

Demek ki, eğer δ sonsuzsa, $1 + \delta = \delta$ olacağından,

$$\omega^{\gamma_1+\delta} \le (\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^\delta \le \omega^{\gamma_1+(1+\delta)} = \omega^{\gamma_1+\delta}$$

ve dolayısıyla

$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^\delta = \omega^{\gamma_1+\delta}.$$

Ya $\delta = m \in \omega$ ise

$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^m$$

çarpımı nedir? $m = 0$ ise çarpımın ne olacağı belli. Bundan böyle $m > 0$ olsun. Elbette sağdan ω^m ile bir defa çarpmak yerine sağdan ω ile m defa çarpmak yeterli. Demek ki

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega$$

çarpımını bulmalıyız.

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega = \bigcup_{r\in\omega}(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)r$$

eşitliğinden dolayı,

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)r$$

çarpımını bulmalıyız. Ama bu,

$$\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k$$

sayısını kendisiyle r kez toplamak demek ve Cantor normal biçiminde yazılmış ordinalleri toplamayı bir önceki teoremden biliyoruz. Örneğin,

$$\begin{aligned}(\omega^{\gamma_1}n_1 &+ \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k) + (\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\\ &= \omega^{\gamma_1}n_1 + \omega^{\gamma_1}n_1 + \omega^{\gamma_2}n_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k\\ &= \omega^{\gamma_1}2n_1 + \omega^{\gamma_2}n_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k.\end{aligned}$$

Buradan kolayca görüleceği üzere,

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)r = \omega^{\gamma_1}rn_1 + \omega^{\gamma_2}n_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k.$$

Demek ki

$$\begin{aligned}(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega &= \bigcup_{r\in\omega}(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)r\\ &= \bigcup_{r\in\omega}(\omega^{\gamma_1}rn_1 + \omega^{\gamma_2}n_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\\ &\le \bigcup_{r\in\omega}\omega^{\gamma_1}(rn_1 + 1) = \omega^{\gamma_1+1}.\end{aligned}$$

Öte yandan, r sonsuza gittiğinde, rn_1 de sonsuza gittiğinden, r'yi yeterince büyük alırsak, rn_1 her s doğal sayısını aşacağından,

$$\begin{aligned}\omega^{\gamma_1+1} &= \omega^{\gamma_1}\omega = \bigcup_{s\in\omega}\omega^{\gamma_1}s \le \bigcup_{r\in\omega}\omega^{\gamma_1}rn_1\\ &\le \bigcup_{r\in\omega}(\omega^{\gamma_1}rn_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\\ &= (\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega.\end{aligned}$$

Sonuçta, $(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega = \omega^{\gamma_1+1}$. Demek ki,

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega^m = \omega^{\gamma_1+m},$$

ve $\delta > 0$ sonlu da olsa sonsuz da olsa,

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega^\delta = \alpha^{\gamma_1+\delta}.$$

Bulduklarımızı toparlayalım:

Teorem 17.8. $\gamma_1 > \ldots > \gamma_k$ *ve* $\delta > 0$ *ordinal olsunlar. r bir doğal sayı olsun. O zaman,*

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega^{\delta} = \omega^{\gamma_1+\delta}$$

ve

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)r = \omega^{\gamma_1}rn_1 + \omega^{\gamma_2}n_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k$$

olur.

Bu teorem sayesinde Cantor normal biçiminde yazılmış herhangi iki ordinali kolaylıkla çarpabiliriz. Örneğin,

$$\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7$$

ile

$$\omega^{\omega^{\omega^2}}8 + \omega^{\omega^{\omega}}8 + \omega^{\omega^3+\omega}5 + \omega^4 3 + \omega + 3$$

ordinallerinin çarpımı için, sırasıyla

$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^{\omega^{\omega^2}}$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^{\omega^{\omega}}8$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^{\omega^3+\omega}5$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^4 3$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)3$$

çarpımlarını bulup bu sırayla toplamalıyız. Başlayalım

$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^{\omega^{\omega^2}} = \omega^{\omega^{\omega}2+\omega^{\omega^2}} = \omega^{\omega^{\omega^2}}$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^{\omega^{\omega}}8 = \omega^{\omega^{\omega}2+\omega^{\omega}}8 = \omega^{\omega^{\omega}3}8$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^{\omega^3+\omega}5 = \omega^{\omega^{\omega}2+\omega^3+\omega}5$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^{\omega^3+1} = \omega^{\omega^{\omega}2+\omega^3+1}$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^4 3 = \omega^{\omega^{\omega}2+4}3$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega = \omega^{\omega^{\omega}2+1}$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)3 = \omega^{\omega^{\omega}2}12 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7.$$

Çarpım bu ordinallerin bu sırayla toplanmasıyla çıkar. İşte sonuç:

$$\omega^{\omega^{\omega^2}} + \omega^{\omega^{\omega}3}8 + \omega^{\omega^{\omega}2+\omega^3+\omega}5 + \omega^{\omega^{\omega}2+\omega^3+1} + \omega^{\omega^{\omega}2+4}3 + \omega^{\omega^{\omega}2+1} + \omega^{\omega^{\omega}2}12 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7.$$

Ordinal Sınavı

1. Her α ordinali için, $1^\alpha = 1$ eşitliğini gösterin.

2. $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$ eşitliği her zaman geçerli mi?

3. Her $n, m \in \omega$ için $\omega^n\omega^m = \omega^m\omega^n$ eşitliği doğru mudur?

4. $\alpha > 0$ için $\omega^\alpha\omega^\beta = \omega^\beta$ olabilir mi?

5. Eğer $1 < \alpha$ ve $\alpha^\beta = \alpha^\gamma$ ise $\beta = \gamma$ eşitliğini kanıtlayın.

6. $2^\omega = 3^\omega = \omega$ eşitliğini kanıtlayın.

7. $\alpha > 1$ ise $\alpha^\beta \geq \beta$ eşitsizliğini kanıtlayın.

8. $\alpha > 1$ ise $\alpha^{\beta+1} > \beta$ eşitsizliğini kanıtlayın. Öte yandan $\alpha^\beta > \beta$ eşitsizliğinin $\alpha = \omega$ ve $\beta = \varepsilon_0$ için yanlış olduğunu kanıtlayın.

9. $\alpha > 1$ bir ordinal olsun. $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$ ise $\beta < \gamma$ eşitsizliğini kanıtlayın. ($\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma$ ise $\beta \leq \gamma$ eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. β üzerinden tümevarım yapın.)

10. $\alpha_0 = \omega$, $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$ olsun. Örneğin,

$$\alpha_1 = \omega^{\alpha_0} = \omega^\omega,\ \alpha_2 = \omega^{\alpha_1} = \omega^{\omega^\omega},\ \alpha_3 = \omega^{\alpha_2} = \omega^{\omega^{\omega^\omega}}.$$

10a. $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın. (Yerleştirme Aksiyomu'nu kullanmalısınız.)

10b. $\varepsilon_0 = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$ olsun. $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$ eşitliğini kanıtlayın.

10c. Eğer $\omega^\varepsilon = \varepsilon$ ise $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ eşitsizliğini kanıtlayın.

10d. ε_0'ın ω'dan büyük ve toplama, çarpma ve üs alma altında kapalı en küçük ordinal olduğunu kanıtlayın.

11. $(\omega + 1)^2$ ve $(\omega + 1)^3$ ordinallerini ω cinsinden bir "polinom" olarak yazın. Aynı şeyi $(\omega + 1)^n$ için yapın.

12. $(\omega+1)^n$ ordinalini Cantor normal biçimde yazın.

13. $(\omega+1)^\omega = \omega^\omega$ eşitliğini kanıtlayın.

14. $\omega^{\omega^{\omega 2}}3 + \omega^{\omega^{\omega+1}}3 + \omega^{\omega^3}2 + \omega^2 + \omega 3 + 4$ ile

$$\omega^{\omega^{\omega^2}}5 + \omega^{\omega^{\omega+1}}2 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3+\omega}2 + \omega^4 + \omega^2 + 1$$

ordinallerini toplayın ve çarpın ve sonucu Cantor normal formda yazın.