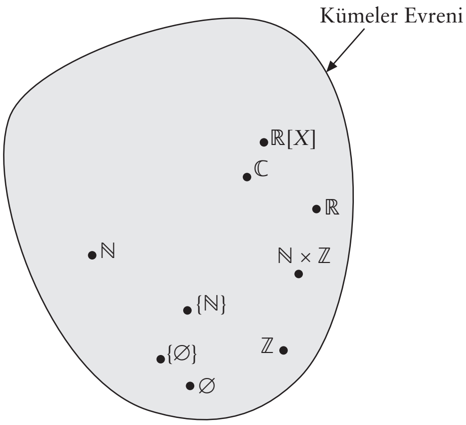
9. Ordinallerin İşlevi

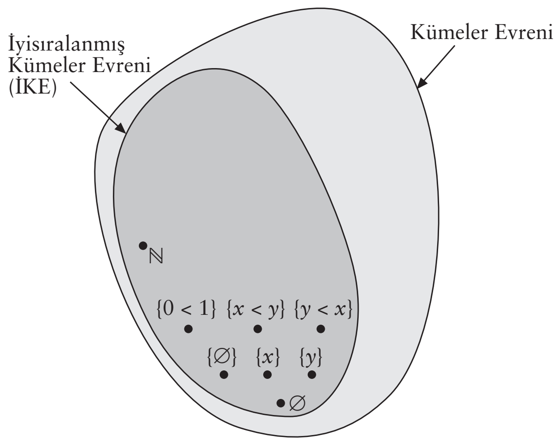
Kümeler topluluğunun bir küme olamayacağını Bertrand Russell Paradoksu'ndan biliyoruz [SKK]. Küme olmayan bir şeye küme diyemeyeceğimize göre, tüm kümeler topluluğuna bir başka ad bulmalıyız. Bu topluluğa ***kümeler evreni*** ya da kısaca ***evren*** diyelim.



Muazzam bir şey olan evreni yukarda resmettik. (Zaten küme olmamasının nedeni de bu muazzamlığı! Küme olmak için çok büyük. O kadar büyük küme mi olurmuş!) İçine de bildiğimiz birkaç küme yerleştirdik.

İyi sıralanmış her küme (sıralamasıyla birlikte) bu evrenin içinde yer alıyor. Çünkü ne de olsa, iyi sıralanmış bir küme, bazı özellikleri sağlayan bir $A \subseteq X \times X$ altkümesi için (X, A) biçiminde yazılan bir çifttir ve [Sİ]'den de bildiğimiz üzere her çift bir kümedir.

İyisıralanmış kümelerin topluluğu da küme olamaz, çünkü tek elemanlı her küme iyisıralı bir küme olduğundan, eğer iyisıralanmış kümeler topluluğu bir küme olsaydı, Tanımlanabilir Altküme Aksiyomu'na göre, tek elemanlı kümeler topluluğu da bir küme olurdu, ama o zaman da bu kümenin bileşimi de, ki bu tüm kümeler evrenidir, Bileşim Aksiyomu'na göre bir küme olurdu.



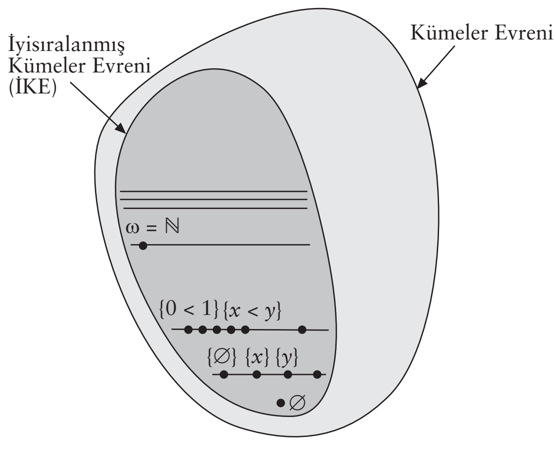
İyisıralanmış kümeler topluluğuna ***iyisıralanmış kümeler evreni*** (İKE) diyelim. Bunu yukarda resmettik.

Bütün iyisıralanmış kümeleri koyu gri renkteki İKE'nin içine koymalıyız. Dolayısıyla tüm tek elemanlı kümeler, bedavadan iyisıralanmış olduklarından, İKE'nin içinde olmalılar. Ayrıca birbirinden farklı her x ve y kümesi için, $\{x, y\}$ kümesinden İKE'nin içinde iki tane olmalı, biri $x < y$ iyisıralaması için, diğeri de $y < x$ iyisıralaması için. Bu iki iyisıralanmış kümeyi resimde $\{x < y\}$ ve $\{y < x\}$ olarak gösterdik.

Genel olarak, x_0, ..., x_{n-1} birbirinden farklıysa, $\{x_0, ..., x_{n-1}\}$ kümesi $n!$ değişik biçimde tam (ya da iyi, farketmez) sıralandığından, bu küme İKE'nin içinde tam $n!$ değişik biçimde yer alır.

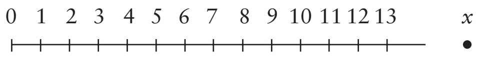
Tahmin edildiğini sandığım üzere, aslında İKE'ye kümeleri değil, kümelerle birlikte kümelerin elemanlarının iyisıralanmış hallerini koyuyoruz. Yani İKE topluluğunda X kümeleri değil, $(X, <)$ iyisıralamaları var, ama biz kolaylık olsun diye, sıralamayı kümenin bir parçasıymış gibi addedip $(X, <)$ yerine yanlış da olsa X yazacağız.

İyisıralanmış kümeleri İKE'nin içine yerleştirirken, küçükleri aşağıya büyükleri yukarıya yazalım, yani eğer iyisıralanmış bir Y kümesi sıralaması bozulmadan X'in içine gömülüyorsa, yani Y'den X'e giden bir eşyapı fonksiyonu varsa, (ve yine) yani Bölüm 8.2'deki yazılımla $Y \preccurlyeq X$ ise, o zaman Y'yi görsel olarak X'in altına yazalım. Eğer $Y \preccurlyeq X$ ve $X \preccurlyeq Y$ ise, yani $X \approx Y$ ise (Bölüm 8.2. Özellik E6), X ve Y'yi aynı satıra yazalım. Örneğin, tüm tek elemanlı kümeler aynı satıra yazılsın.



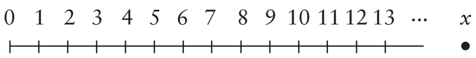
Böylece iyisıralanmış kümeleri kat kat sıralarız. İyisıralanmış küme ne kadar büyükse o kadar yukarı yazılır. Eşyapısal olanları da aynı kata yerleştirdik.

Zemin katta ∅ var elbette, boşküme zemin katta tek başına oturuyor. Bunun bir üstündeki birinci kat oldukça kalabalık, birinci katta bir elemanlı tüm kümeler var. Bir sonraki katta iki elemanlı kümeler var ama bu kümelerin her biri iki kez yer alıyor. n-inci katta n tane elemanı olan kümeler var, her biri $n!$ kez yer alıyor. Sonlu kümeler bittiğinde karşımıza $\mathbb{N}$ (doğal sıralamayla) ve $\mathbb{N}$'ye eşyapısal olan iyisıralamalar çıkıyor. Doğal olarak sıralanmış $\mathbb{N}$ kümesini, ω olarak göstermenin bir gelenek olduğunu ve bu geleneğe uyacağımızı söylemiştik.



ω iyisıralaması

ω'nın oturduğu katın bir üst katında ω'nın en sonuna tek bir eleman getirilerek oluşan iyisıralamalar oturuyor. ω'da olmayan herhangi bir x kümesi alıp x'i ω'nın en sonuna en büyük eleman olarak koyalım. Böylece $\omega \cup \{x\}$ kümesi iyisıralanır. (Bkz. Altbölüm 5.1.) Bu yeni iyisıralamada x, tüm doğal sayılardan daha büyüktür. Ayrıca ω'nın bir üst katında oturan tüm iyisıralamalar



ω'nın üstkatındaki bir iyisıralama.
x, ω'da olmayan bir kümedir ve ω'nın en sonuna eklenmiştir.

bu biçimdedirler. Doğal sayılar da kendi aralarında doğal olarak sıralanmışlardır. ω, ω'nın bir elemanı olmadığından (bkz. Teorem 9.1), burada x yerine ω alabiliriz. Yani

$$S(\omega) = \omega \cup \{\omega\}$$

iyisıralaması, ω'nın oturduğu katın bir üst katında oturuyor.

Teorem 9.1. $\omega \notin \omega$.

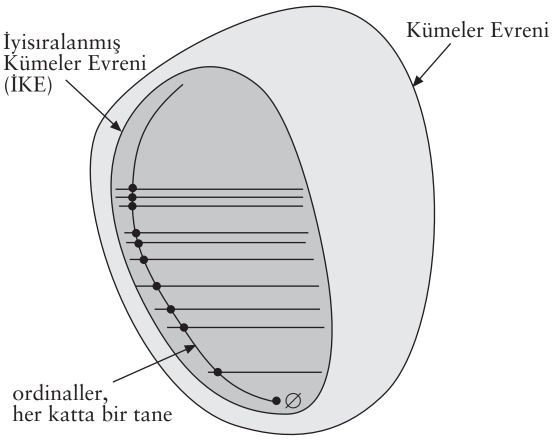
Kanıt. $\omega \in \omega$ olsa, ω bir n doğal sayısına eşit olur. O zaman da $S(n) \in \omega = n$ olur [Sİ]. Bu da $S(n) < n$ demektir. Ama $n < n + 1 = S(n)$ eşitsizliğinden dolayı $S(n) < n$ olamaz. □

Her katın bir üst katı vardır. Eğer X bir iyisıralamaysa, X'te bulunmayan bir Y kümesini (ki vardır öyle bir küme, yoksa X tüm kümeleri içerirdi) alıp X'e eleman olarak ekleyelim ve Y'yi X'in tüm elemanlarından daha büyük yapalım. Böylece,

$$X \cup \{Y\}$$

kümesi iyisıralanmış olur ve bu iyi sıralı küme X'in oturduğu katın hemen bir üstünde oturur.

Eğer $X \notin X$ ise (ki eğer gerekmedikçe kabul etmek istemediğimiz Temellendirme Aksiyomu'nu kabul edersek $X \notin X$ olmak zorundadır, bkz [Sİ]), o zaman $Y = X$ alabiliriz ve böylece iyisıralanmış $S(X) = X \cup \{X\}$ kümesini X'in bir üst katında buluruz.



Şimdi önümüzdeki birkaç bölümün ana hedefini söyleyelim: Her iyisıralanmış kümeler katından bir ve sadece bir tane temsilci seçeceğiz ve bunu olabildiğince doğal biçimde yapacağız. Bu temsilcilere ***ordinal*** adını vereceğiz.

Her katta en fazla bir ordinal olacak. Bunu kanıtlaması kolay. Ve her katta en az bir ordinal olacak. Bunu kanıtlamak daha zor. Hatta şu anki halimizle imkânsız. Bunu kanıtlamak için adına ***Yerleştirme Aksiyomu*** diyeceğimiz yeni bir aksiyoma ihtiyacımız olacak. Bu aksiyoma neden gereksindiğimizi anlatmaya çalışacağız, yani okura bu gereksinimi hissettirmeye çalışacağız.

10. Ordinaller

10.1. Tanım

Bir α kümesine ordinal denmesi için iki koşul gerçekleşmelidir. Koşullardan ilki şu.

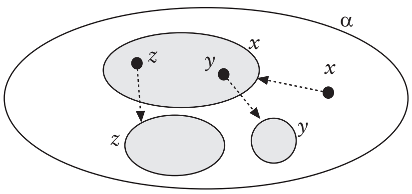
Ord1. α'*nın her elemanı*, *aynı zamanda* α'*nın bir altkümesidir*.

Bu koşul, tam tamına,

$$(y \in x \in \alpha) \Rightarrow y \in \alpha$$

diyor, yani α'nın elemanlarının elemanları α'nın elemanlarıdır diyor, yani α'nın her elemanı α'nın altkümesidir diyor.

Ord1 özelliği sağlayan kümelere $\in$-***kapalı***[1] denir. Biraz zor gerçekleşen bir koşul olduğu düşünülebilir, ama boşkümenin



$\in$-kapalı bir α kümesi: α'nın her öğesi α'nın bir altkümesi

(yani 0'ın) $\in$-kapalı olduğu çok bariz. Aslında her doğal sayı, [Sİ]'de tanımlandığı biçimde, $\in$-kapalıdır. Doğal sayılar küme-

---

1 İngilizcesi $\in$-complete.

si $\mathbb{N}$ de (yani ω da) $\in$-kapalıdır. Bunların kanıtını birazdan vereceğiz.

Eğer $x = \{y\}$ ve $y = \{x\}$ ise $\{x, y\}$ kümesi $\in$-kapalıdır[2].

Kolayca görüleceği üzere, $\in$-kapalı bir α kümesinde

$$x_n \in x_{n-1} \in \ldots \in x_1 \in \alpha$$

koşulları

$$x_n \in \alpha$$

koşulunu gerektirir. $\in$-kapalı kümelerin bize gerekecek birkaç özelliği daha var:

Önsav 10.1. *Elemanları $\in$-kapalı olan bir kümenin bileşimi ve kesişimi de $\in$-kapalıdır.*

Kanıt: A, elemanları $\in$-kapalı kümeler olan bir küme olsun. $y \in x \in \bigcup A$ varsayımını yapalım. O zaman, $\bigcup A$ kümesinin tanımı gereği, bir $\alpha \in A$ için, $y \in x \in \alpha$ olur. Ama α kümesi $\in$-kapalı olduğundan, bundan $y \in \alpha$ çıkar. Demek ki

$$y \in \alpha \subseteq \bigcup A,$$

yani $y \in \bigcup A$. Böylece $\bigcup A$ bileşiminin $\in$-kapalı olduğu kanıtlandı. $\bigcap A$ için kanıt aynıdır ve okura bırakılmıştır. □

Not 1. x herhangi bir küme olsun. $\emptyset$, x'in $\in$-kapalı bir altkümesidir. x'in tüm $\in$-kapalı altkümelerinin bileşimi x'in en büyük $\in$-kapalı altkümesidir.

Not 2. x herhangi bir küme olsun. x'i altküme olarak içeren $\in$-kapalı bir küme olduğunu (yani x'in $\in$-kapalı bir üstkümesi olduğunu) varsayalım. O zaman, x'in tüm $\in$-kapalı üstkümelerinin kesişimi x'in en küçük $\in$-kapalı üstkümesidir. (Bu kümelerin kesişimi neden bir kümedir?)

2 Öte yandan eğer Temellendirme Aksiyomu doğruysa $x = \{y\}$ ve $y = \{x\}$ eşitliklerini sağlayan x ve y kümeleri olamaz. (Bkz. [Sİ].)

Not 3. x herhangi bir küme olsun. x'i eleman olarak içeren en küçük $\in$-kapalı kümeyi bulmaya kalkışalım. $A_0 = \{x\}$ olsun. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için, A_n tanımlanmışsa,

$$A_{n+1} = A_n \cup (\bigcup A_n)$$

olsun. Tanımdan dolayı A_n'nin elemanları A_{n+1}'in hem elemanları hem de altkümeleri. Şimdi $n = 0, 1, \ldots$ için A_n kümelerinin

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

bileşimini alalım. Eğer bu bileşim bir kümeyse, x'i eleman olarak içeren en küçük $\in$-kapalı kümedir. (Alıştırma.) Bölüm 12'de sözünü edeceğimiz Yerleştirme Aksiyomu kullanılarak $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ topluluğunun küme olduğu gösterilebilir.

$\in$-kapalı kümeler hakkında birkaç basit olgu kanıtlayalım. Eğer α bir kümeyse, $S(\alpha)$'nın

$$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$$

larak tanımlandığını anımsayalım [Sİ].

Önsav 10.2. *Eğer α kümesi $\in$-kapalıysa, $S(\alpha)$ da $\in$-kapalıdır.*

Kanıt: $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$ ve $y \in x$ olsun.

Eğer $x \in \alpha$ ise, α bir $\in$-kapalı küme olduğundan, $y \in \alpha$ olmalı. Ama ayrıca $\alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\} = S(\alpha)$. Demek ki $y \in S(\alpha)$.

Eğer $x \notin \alpha$ ise, $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$ olduğundan, $x = \alpha$ olmalı. O zaman da $y \in x = \alpha$. □

Sonuç 10.3. *Her doğal sayı $\in$-kapalıdır.*

Kanıt: $0 = \emptyset$ olduğundan 0 sayısı $\in$-kapalıdır. Önsav 10.2 tümevarımla kanıt için zemini hazırlamıştır. □

Sonuç 10.4. *Doğal sayılar kümesi $\in$-kapalıdır.*

Kanıt: Her n doğal sayısı $S(n)$'nin yani $n+1$'in elemanı olduğundan, $\mathbb{N} = \bigcup \mathbb{N}$. İstediğimiz Sonuç 10.3'ten ve Önsav 10.1'den çıkar. □

Alıştırmalar

10.1.1. Eğer $a \subseteq \mathbb{N}$ altkümesi $\in$-kapalıysa, o zaman ya $a \in \mathbb{N}$ ya da $a = \mathbb{N}$ olduğunu kanıtlayın.

10.1.2. x herhangi bir küme olsun. $A_0 = \{x\}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A_{n+1} = A_n \cup (\bigcup A_n)$$

olsun. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ bileşiminin bir küme olduğunu varsayıp, bu bileşimin x'i eleman olarak içeren en küçük $\in$-kapalı küme olduğunu kanıtlayın.

Bir α kümesine ordinal denmesi için ikinci koşul şu:

Ord2. α *kümesi* $\in$ *ikili ilişkisi tarafından iyisıralanmıştır.*

Ord2 aşağıdaki önermelerin topuna denktir:

Ord2a. *Eğer* $x \in \alpha$ ise $x \notin x$.

Ord2b. *Eğer* $x, y, z \in \alpha$ *ve* $z \in y$ *ve* $y \in x$ *ise* $z \in x$.

Ord2c. *Eğer* $x, y \in \alpha$ *ise ya* $x \in y$ *ya* $x = y$ *ya da* $y \in x$.

Ord2d. *Eğer A,* α*'nın boş olmayan bir altkümesiyse, öyle bir* $a \in A$ *vardır ki, her* $b \in A$ *için ya* $a \in b$ *ya da* $a = b$.

Ord1 ve Ord2 özelliklerini sağlayan bir kümeye ***ordinal*** denir.

Herhangi bir doğal sayı kümesi Ord2'yi sağladığından [Sİ], Sonuç 10.3 ve 10.4'ten her doğal sayının ve $\mathbb{N}$'nin ordinal oldukları çıkar.

Not 1. Ord2a, sıralama dilinde "x, x'ten küçük değil" diye okunur. Eğer Temellendirme Aksiyomu'nu doğru kabul edersek, hiçbir x kümesi için $x \in x$ olamayacağından bunu söylemeye gerek yoktur, zaten doğrudur [Sİ]. Ayrıca Ord2a'dan $\alpha \notin \alpha$ çıkar, çünkü aksi halde $\alpha \in \alpha$ olurdu ve Ord2a'ya göre $\alpha \notin \alpha$ olurdu!

Not 2. Ord2b, $\in$ ikili ilişkisinin geçişli bir ilişki olduğunu söylüyor. Sıralama dilinde bu şöyle ifade edilir: α'nın her x, y, z

elemanı için, z, y'den ve y de x'ten küçükse, o zaman z, x'ten küçüktür. Demek ki Ord2a ve 2b, α'nın $\in$ ilişkisi tarafından sıralandığını söylüyor. Dolayısıyla, bir ordinalin x ve y elemanları için, "$x < y$" ve "$x \in y$" ifadelerini ayırt etmeksizin kullanabiliriz. Demek ki ilk okuyuşta tuhaf gelebilecek ama yaşamı çok kolaylaştıran ve alışılması gereken şu önerme doğrudur: *Bir ordinalin her elemanı, kendinden küçük elemanların kümesidir*.

Eğer α bir ordinalse, α, Ord1'i sağladığından, Ord2b'de y ve z'nin α'nın elemanları olduğunu söylemeye gerek yoktur, bu zaten zorunlu olarak öyledir.

Eğer α bir ordinalse, Ord2b, ayrıca α'nın elemanlarının $\in$-kapalı olduklarını söylüyor. Buradan hareketle bir ordinalin elemanlarının da ordinal olduklarını kanıtlamak çok basittir. Birazdan bunu kanıtlayacağız.

Not 3. Ord2d, α'nın iyisıralandığını söylüyor. Nitekim, sıralamaca dilinde, Ord2d'de belirtilen a, A'nın en küçük elemanıdır.

Not 4. Ord2c, $\in$ ikili ilişkisinin α'yı tamsıraladığını söylüyor. Eğer Ord2d doğruysa, Ord2c'ye gerek yoktur, bu zaten doğrudur; bunu görmek için Ord2d'deki A altkümesini $\{x, y\}$ almak yeterlidir.

Kanıtların satır sayısında tasarruf sağlamak amacıyla bir kümeyi ordinal yapan en az sayıda özelliği yazalım:

Ord1. *α'nın her elemanı, aynı zamanda α'nın bir altkümesidir.*

Ord2a. *Eğer $x \in \alpha$ ise $x \notin x$.*

Ord2b′. *Eğer $x \in \alpha$ ise ve $z \in y$ ve $y \in x$ ise o zaman $z \in x$.*

Ord2d. *Eğer A, α'nın boş olmayan bir altkümesiyse, öyle bir $a \in A$ vardır ki, her $b \in A$ için ya $a \in b$ ya da $a = b$.*

10.2. Ordinallerimizi Tanıyalım.

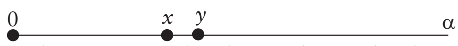
$\emptyset$'den, yani 0'dan değişik bir α ordinalinin ($\in$ ilişkisi için elbette, başka bir sıralama yok) bir en küçük elemanı olmalı. Nedir bu eleman? Bu en küçük elemana a dersek, $a \cap \alpha = \emptyset$ olmalı, çünkü $a \cap \alpha$'nın bir elemanı a'dan küçük olur. Öte yandan α ordinal olduğu için, $a \subseteq \alpha$. Demek ki $a = a \cap \alpha = \emptyset = 0$, yani ordinallerin en küçük elemanı boşkümedir, yani 0'dır.

0, boşküme olmayan her ordinalin en küçük elemanıdır.

İlk kez gören için, bu tür akıl yürütmeler biraz şaşırtıcı olabilir. Zamanla alışılıyor.

Birazdan bir ordinalin ikinci elemanının, eğer varsa elbet, 1 olduğunu kanıtlayacağız. 1'den sonraki eleman da 2 olmalı...

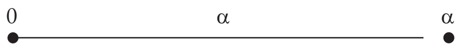
Eğer x bir α ordinalinin bir elemanıysa ama en büyük elemanı değilse, o zaman, α iyisıralı olduğundan, α'da x'ten hemen sonra gelen bir eleman vardır. Bu elemanı teşhir edelim. x'ten hemen sonra gelen elemana y diyelim. Küçüklüğün tanımından dolayı, y, kendisinden küçük elemanların (yani kendi



y, x'ten hemen sonra gelen eleman olsun. y, kendisinden küçük elemanlar kümesidir. Bu elemanlar da ya x'ten küçüktür ya da x'e eşittir. Demek ki $y = x \cup \{x\} = S(x)$.

elemanlarının!) kümesidir. Bu elemanlar da ya x'e eşittir ya da x'ten küçüktür. x'ten küçük olanlar tam tamına x'in elemanları olduğundan, $y = x \cup \{x\}$ buluruz.

Teorem 10.5. *Eğer α bir ordinalse, $S(\alpha)$ da bir ordinaldir.*



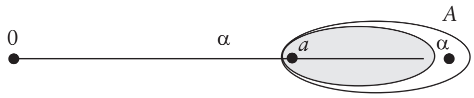
$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$

Kanıt: Önsav 10.2'de $S(\alpha)$'nın Ord1'i sağladığını gösterdik.

Ord2a'nın Kanıtı: $x \in S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ olsun. Diyelim $x \in x$. α bir ordinal olduğundan, x, α'da olamaz, çünkü Ord2a'ya göre bir ordinalde $x \in x$ ilişkisi yasak. Demek ki $x = \alpha$. Dolayısıyla $\alpha \in \alpha$. Ama α bir ordinal olduğundan, α'nın bir elemanı (bu eleman α bile olsa!) kendi elemanı olamaz. (Bu da alışık olmadığımız ilginç bir kanıtlardan!)

Ord2b'nin Kanıtı: $x \in S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ olsun ve $z \in y$ ve $y \in x$ ilişkilerini varsayalım. Eğer $x \in \alpha$ ise, α bir ordinal olduğundan $z \in x$. Eğer $x \notin \alpha$ ise, $x = \alpha$ olmak zorunda. Demek ki $z \in y$ ve $y \in \alpha$. Ama α ordinal olduğundan bundan $z \in \alpha = x$ çıkar.

Ord2d'nin Kanıtı: A, $S(\alpha)$'nın boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer $A \cap \alpha = \emptyset$ ise, o zaman $A = \{\alpha\}$ olmak zorunda ve



$A \subseteq S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$

$a = \alpha$ görevi görür. Öte yandan eğer $A \cap \alpha \neq \emptyset$ ise, o zaman

$$A \cap \alpha$$

kümesinin ($\in$ için elbette, başka sıralama yok) bir en küçük a elemanı vardır. a, A'nın en küçük elemanıdır. □

Bu teoreme göre, bir ordinalin en küçük elemanı 0 olduğundan, 0'dan sonra gelen ilk eleman 1'dir. Sonra 2, 3, 4 gelir ve eleman kaldığı sürece bu böylecene devam eder.

10.3. Temel Olgular

Aşağıda kanıtlayacağımız teoremler ordinaller hakkında temel ve basit olgulardır. Ordinalleri hissetmenizde etkili olacaklarını umuyoruz.

Teorem 10.6. *Bir ordinalin her elemanı bir ordinaldir.*

Kanıt: α bir ordinal ve $x \in \alpha$ olsun. Ord2b'ye göre x, Ord1'i sağlar. Şimdi $\in$ ilişkisinin x'i iyisıraladığını kanıtlayalım. $x \subseteq \alpha$ olduğundan, x, α'yı iyisıralayan ilişki tarafından iyisıralanır. (Her iyisıralı kümenin altkümesi, üstkümeyi sıralayan ilişki tarafından iyisıralanmıştır.) Demek ki $\in$ ikili ilişkisi x'i de iyisıralar. □

Teorem 10.7. *Eğer x bir α ordinalinin başlangıç dilimiyse, ya $x = \alpha$ ya da $x \in \alpha$'dır. Demek ki bir ordinalin bir başlangıç dilimi bir ordinaldir.*

Kanıt. α bir ordinal olsun ve x, α'nın bir başlangıç dilimi olsun. Eğer $x \neq \alpha$ ise a, $\alpha \setminus x$'in en küçük elemanı olsun. O zaman

$$x = \{y \in \alpha : y < a\} = \{y \in \alpha : y \in a\} = a \in \alpha$$

olmalıdır. □

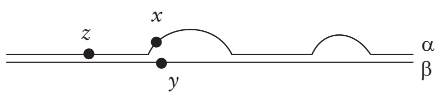
Teorem 10.8. β, α *ordinalinin bir altkümesi olsun.* β*'nın bir ordinal olması için* β*'nın* α*'nın bir başlangıç dilimi olması gerek ve yeterdir.*

Kanıt: β, α'nın başlangıç dilimiyse, sonuç bir önceki teoremde verildi. Şimdi α ve β birer ordinal ve $\beta \subseteq \alpha$ olsun. Her iki kümede de sıralamanın $\in$ ikili ilişkisi tarafından verildiğini aklımızda tutalım. β bir ordinal olduğundan, β'nın bir elemanından küçük bir eleman β'nın bir elemanıdır. Bu da β'nın α'nın bir başlangıç dilimi olduğunu gösterir. □

10.4. Derin Olgular

Teorem 10.9. *Eğer* α *ve* β *birer ordinalse, ya* $\alpha \in \beta$ *ya* $\alpha = \beta$ *ya da* $\beta \in \alpha$*'dır.*

Kanıt: Diyelim $\alpha \cap \beta$, hem α'nın hem de β'nın özaltkümesi. Bir çelişki elde edeceğiz. x, $\alpha \setminus \alpha \cap \beta$'nın ve y, $\beta \setminus \alpha \cap \beta$'nın en küçük elemanı olsunlar. $x = y$ eşitliğini kanıtlayabilirsek, işimiz iş, çünkü o zaman $x = y \in \alpha \cap \beta$ olacak ve istediğimiz çelişkiyi elde edeceğiz.



x ve y'nin rolleri simetrik olduğundan, $x \subseteq y$ ilişkisini kanıtlamak yeterli.

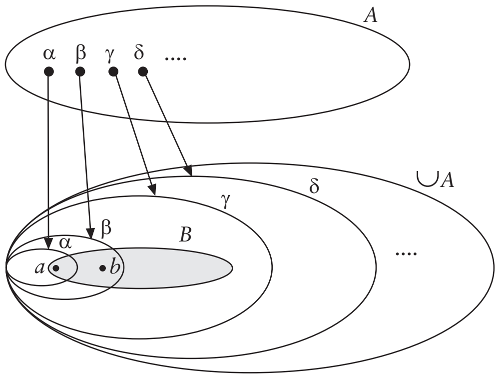
$z \in x$ olsun. Demek ki α ordinalinde $z < x$ eşitsizliği geçerli. x elemanı $\alpha \setminus \alpha \cap \beta$'nın en küçük elemanı olduğundan, bundan

$z \in \alpha \cap \beta$ çıkar. Dolayısıyla $z \in \beta$. Şimdi, ya $z = y$ ya $z \in y$ ya da $y \in z$. Bakalım hangisi. Birinci şıkta, $z = y \notin \alpha \cap \beta$, imkânı yok! Üçüncü şıkta, $z \in x$ ilişkisinden dolayı $y \in x$ elde ederiz, ki bundan da $y \in \alpha \cap \beta$ çıkar, gene çelişki. Dolayısıyla sadece ikinci şık mümkün: $z \in y$. Böylece $x \subseteq y$ içindeliğini elde etmiş oluruz. □

Teorem 10.10. *Boşküme olmayan herhangi bir ordinaller kümesinin bileşimi ve kesişimi de bir ordinaldir.*

Kanıt: Kesişimin ordinal olduğu belli: Kesişim, ordinaller kümesinin en küçük elemanına eşit. Bileşimin bir ordinal olduğunu kanıtlayalım.

A, bir ordinaller kümesi olsun. Her $\alpha \neq \beta \in A$ için, bir önceki teoreme göre, ya $\alpha \in \beta$ ya da $\beta \in \alpha$. Bunu kullanacağız.



A, ordinaller kümesi. Aslında şekil yanlış, çünkü, örneğin, α, β'nın bir elemanı olmalıydı. Doğru şekil kafa karıştırıcı demeye cesaret edemeyiz de, çok karmaşık.

$x \in \cup A$ olsun. O zaman, bir $\alpha \in A$ için, $x \in \alpha$ olur. Ama α ordinal olduğundan $x \subseteq \alpha$. Öte yandan, $\alpha \subseteq \cup A$. Demek ki $x \subseteq \cup A$. Ord1 kanıtlandı.

Ord2a'yı kanıtlayalım. Bu kolay: $x \in \cup A$ olsun. O zaman, bir $\alpha \in A$ için, $x \in \alpha$. Ama α ordinal olduğundan $x \notin x$.

Sıra Ord2b'de. Bu da kolay: $x \in \bigcup A$ ve $z \in y \in x$ olsun. O zaman, bir $\alpha \in A$ için, $x \in \alpha$. Ama α ordinal olduğundan $z \in x$.

Şimdi yukardaki teoremi kullanarak Ord2d'yi kanıtlayacağız. $\emptyset \neq B \subseteq \bigcup A$ olsun. O zaman A'da $\alpha \cap B \neq \emptyset$ önermesini sağlayan bir α vardır. α bir ordinal olduğundan, α'nın $\alpha \cap B$ altkümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana a diyelim. Bu a'nın B'nin en küçük elemanı olduğunu iddia ediyorum. $b \in B \setminus \{a\}$ olsun. Belli bir $\beta \in A$ için, $b \in \beta$. Teorem 6'ya göre a ve b birer ordinal. Teorem 9'a göre ya $a \in b$ ya da $b \in a$. İkinci durumda, $b \in a \in \alpha$ olacağından, $b \in \alpha$, yani $b \in \alpha \cap B$ ve bu da a'nın $\alpha \cap B$'nin en küçük elemanı olmasıyla çelişir. Demek ki $a \in b$ ve a, B'nin en küçük elemanı. □

Teorem 10.11. *Sıralı küme olarak eşyapısal olan iki ordinal birbirine eşittir.*

Kanıt: α ve β, $f : \alpha \to \beta$ eşyapısal eşlemesiyle eşyapısal olan iki ordinal olsun. O zaman, Teorem 10.9'a göre ya $\alpha \subseteq \beta$ ya da $\beta \subseteq \alpha$. Birincisini varsayabiliriz. O zaman, Teorem 10.8'e göre, $i(x) = x$ formülüyle tanımlanmış $i : \alpha \to \beta$ fonksiyonu da α'dan β'nın α başlangıç dilimine giden bir gömmedir. Önsav 7.6'ya göre $f = i$. Demek ki $\beta = f(\alpha) = i(\alpha) = \alpha$. □

Sonuç 10.12. *İyisıralı bir küme en fazla bir ordinale ve tek bir eşyapı eşlemesiyle eşyapısal olabilir.*

Kanıt: Eğer A iyisıralı (ya da sadece sıralı) kümesi α ve β ordinalleriyle eşyapısalsa, α ve β da birbiriyle eşyapısaldır, dolayısıyla yukardaki teoreme göre $\alpha = \beta$'dır. Eşyapısal eşlemenin biricikliği Önsav 7.6'dan çıkıyor. □

İlerde her iyisıralı kümenin bir ordinalle eşyapısal olduğunu kanıtlayacağız ama bunun için daha güçlü bir kümeler kuramına ihtiyaç duyacağız.

Teorem 10.13. *Eğer bir* α *ordinalinden bir* β *ordinaline giden bir eşyapı fonksiyonu varsa, o zaman ya* $\alpha = \beta$ *ya da* $\alpha \in \beta$*'dir. Dolayısıyla* $\alpha \subseteq \beta$ *ve* $\alpha \leq \beta$ *olur.*

Kanıt: $f : \alpha \to \beta$ sıralamayı koruyan bir fonksiyon olsun. Teorem 7.9'a göre $f(\alpha)$'nın β'nın bir başlangıç dilimi olduğunu varsayabiliriz. Teorem 10.7'ye göre ya $f(\alpha) = \beta$ ya da $f(\alpha) \in \beta$ ve $f(\alpha)$ bir ordinaldir. Teorem 11'e göre de $f(\alpha) = \alpha$. □

Sonuç 10.14. α *ve* β *ordinal olsunlar. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir.*

1. $\alpha \in \beta$ *ya da* $\alpha = \beta$,
2. $\alpha \subseteq \beta$,
3. $\alpha \leq \beta$,
4. α, β*'nın bir başlangıç dilimi*,
5. α, β*'nın bir altkümesiyle eşyapısal.*

Alıştırmalar

10.4.1. α bir ordinal olsun. Eğer α'nın en büyük elemanı varsa bu elemanın $\cup\alpha$ olduğunu kanıtlayın. Eğer α'nın en büyük elemanı yoksa $\cup\alpha = \alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

10.4.2. B bir ordinal kümesi olsun. $C \subseteq B$ şu özelliği sağlasın: "Her $\beta \in B$ için $\beta \leq \gamma$ eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma \in C$ vardır". Bu durumda $\cup_{\beta \in B} \beta = \cup_{\gamma \in C} \gamma$ eşitliğini kanıtlayın.

10.4.3. $\alpha = S(\beta) = \beta \cup \{\beta\}$ olsun. α bir ordinalse, β'nın da bir ordinal olduğunu kanıtlayın.

10.4.4. α ve β birer ordinal olsunlar. $S(\alpha) = S(\beta)$ ise $\alpha = \beta$ eşitliğini kanıtlayın.