Math 111
Final
2006 Fall

1. X bir küme ve R de X üzerine tanımlanmış ikili bir ilişki olsun. Her $x, y \in X$ için
$xRy \Rightarrow x \equiv y$
önermesini sağlayan X üzerinde en küçük bir denklik $\equiv$ bağıntısı olduğunu kanıtlayın.

2. $(X_n)_n$, X kümesinin altkümelerinden oluşan bir dizi olsun. $\liminf X_n$ ve $\limsup X_n$ kümelerini şöyle tanımlayalım: $a \in X$ için

$a \in \liminf X_n \Leftrightarrow$ öyle bir n_0 doğal sayısı vardır ki her $n > n_0$ için $a \in X_n$ olur.

$a \in \limsup X_n \Leftrightarrow$ her n_0 doğal sayısı için öyle bir $n > n_0$ var ki $a \in X_n$ olur.

2i. $\limsup X_n$ kümesinin sonsuz sayıda n için X_n'de olan elemanlardan oluştuğunu gösterin. $\liminf X_n$ kümesinin sonlu tanesi hariç bütün n'ler için X_n'de olan elemanlardan oluştuğunu gösterin.

2ii.

$$\liminf X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} X_m\right)$$

ve

$$\limsup X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} X_m\right).$$

eşitliklerini gösterin.

2iii. $X_n = \{n, n+1, .., 2n\}$ olsun. $\liminf X_n$ ve $\limsup X_n$ kümelerini bulun.

2iv. Her n için $X_{n+1} \subseteq X_n$ olsun. $\liminf X_n$ ve $\limsup X_n$ kümelerini bulun.

2v. $\liminf X_n \neq \limsup X_n$ eşitsizliğini sağlayan bir örnek verin.

3. R değişmeli bir halka olsun. $\leq$ da R üzerinde bir tamsıralama olsun öyle ki her $x, y, z \in R$ için,

a) $x \leq y$ ise $x + z \leq y + z$.

b) $0 < x$ ve $0 < y$ ise $0 < xy$.

Her $x, y, z \in R$ için aşağıdakideri kanıtlayın.

3i. $x < y$ ise $-y < -x$.

3ii. $x < y$ ise $x + z < y + z$.

3iii. $x \leq y$ ve $0 \leq z$ ise $xz \leq yz$.

3iv. $x \leq y$ ve $0 \geq z$ ise $xz \geq yz$.

3v. $-1 < 0 < 1$.

3vi. $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ ise $xy \neq 0$.

3vii. $x^2 \geq 0$.

3viii. $x < 0$ ise x, R'de karelerin toplamı olarak yazılamaz..

3ix. -1, R'de karelerin toplamı olarak yazılamaz.

3x. $x \geq 0$ ve x in R'de çarpımsal tersi var ise $x^{-1} > 0$.

$|x|$ söyle tanımlansın: $|x| = x$ eğer $x \geq 0$ ve $|x| = -x$ eğer $x \leq 0$.

3xi. $|x| \geq 0$.

3xii. $xy| = |x|\,|y|$.

3xiii. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

3xiv. $|x - y| \geq \big|\,|x| - |y|\,\big|$.

$d(x, y) = |x - y|$ olarak tanımlansın.

3xv. $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$.

3*x*vi. $d(x, y) = d(y, x)$.
3*x*vii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.