Math 111 / Math 113 Set Theory
Midterm
November 2007
Ali Nesin

Tanımlar:
$0 = \emptyset$.
x bir küme ise, $S(x) = x \cup \{x\}$.
0'ı içeren ve içerdiği her x elemanı için $S(x)$'i de içeren bir kümeye ***tümevarımsal*** denir.
ω en küçük tümevarımsal kümedir, i.e. Bütün tümevarımsal kümelerin kesişimidir.

1. *x ve y küme ise $\{\{x\}, \{x, y\}\}$'nin de küme olduğunu gösterin.* (7 pts.)

Proof: x ve y küme ise $\{x, y\}$'nin küme olduğunu söyleyen bir aksiyom vardır. $x = y$ alırsak $\{x\}$'in de bir küme olduğu çıkar.Aynı aksiyomdan $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ bir kümedir.

2. *x ve y iki küme olmak üzere, (x, y) ikilisini $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ kümesi olarak tanımlayalım. x, y, z, t herhangi dört küme ise $(x, y) = (z, t)$* ancak ve ancak $x = z$ ve $y = t$ *olduğunu gösterin.* (7 pts.)

Proof: $x = z$ ve $y = t$ ise $(x, y) = (z, t)$ olduğu barizdir.
Diğer taraftan, $(x, y) = (z, t)$ olsun. Tanım gereği
$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}.$$
Dolayısıyla $\{x\}$ hem $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ hem de $\{\{z\}, \{z, t\}\}$ kümelerinin elemanı. Yani ya $\{x\} = \{z\}$ ya da $\{x\} = \{z, t\}$. İlk durumda $x = z$ ve ikinci durumda $z = t = x$.Yani her iki durumda $x = z$ dir. Geriye $y = t$ olduğunu göstermek kalıyor.
$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$$
ve $\{x\} = \{z\}$olduğundan, $\{x, y\} = \{z, t\}$ olmalı. Sonuç olarak $x = z$ eşitliği $y = t$ eşitliğini için yeterlidir.

3. *X ve Y iki küme olsun ve $Z = \wp(\wp(X \cup Y))$ olsun. $(x, y) \in Z$ for all $x \in X$ and $y \in Y$ olduğunu gösterin.* (7 pts.)

Proof: $\wp(\wp(X \cup Y))$ kümeler kuramındaki iki aksiyomdan dolayı bir kümedir. $x \in X$ ve $X \subseteq X \cup Y$ ise, $x \in X \cup Y$ dir. Aynı şekilde $y \in X \cup Y$.
$$\{x\} \subseteq X \cup Y \text{ ve} \{x, y\} \subseteq X \cup Y.$$
Dolayısıyla
$$\{x\} \in \wp(X \cup Y) \text{ ve } \{x, y\} \in \wp(X \cup Y).$$
bundan dolayı
$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \wp(X \cup Y).$$
Bu da bize
$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \wp(\wp(X \cup Y)) = Z. \text{ verir.}$$

4. *$x \in X$ ve $y \in Y$ olacak şekilde bütün x, y ikililerin bir küme oluşturduğunu gösteriniz. Bu kümeyi $X \times Y$ ile gösteriyoruz.* (7 pts.)

Proof: Bu topluluk $\{(x, y) \in \wp(\wp(X \cup Y)) : x \in X, y \in Y\}$ ile ifade edilebilir. Bu topluluğun küme olduğunu göstermek için sınıfta verdiğimiz 3. aksiyomu kullanacagız: "Z bir küme ve $\varphi(z)$ bir formülse $\{z \in Z : \varphi(z)\}$ topluluğu bir kümedir".
$\alpha(x, u)$ önermesi
$$x \in u \wedge \forall t\, (t \in u \to t = x)$$
olsun. O zaman $\alpha(x, u)$ ancak ve ancak $u = \{x\}$ olduğunda sağlanır.

$\beta(x, y, v)$ önermesi,

$$x \in v \wedge y \in v \wedge \forall t\,(t \in u \rightarrow (t = x \vee t = y))$$

olsun. O zaman da $\beta(x, y, v)$ ancak ve ancak $v = \{x, y\}$ olduğunda sağlanır.

$\gamma(x, y, z)$ önermesi,

$$\exists u\, \exists v\, (\alpha(x, u) \wedge \beta(x, y, v) \wedge \beta(u, v, z))$$

olsun bu durumda da $\gamma(x, y, z)$ ancak ve ancak $z = \{\{x\}, \{x, y\}\} = (x, y)$ olduğunda sağlanır.

$\varphi(z)$ önermesi,

$$\exists x\, \exists y\, (x \in X \wedge y \in Y \wedge \gamma(x, y, z))$$

olsun. $\varphi(z)$ ancak ve ancak bir $x \in X$ ve $y \in Y$ için $z = (x, y)$ ise sağlanır.

Dolayısı ile $\{(x, y) \in \wp(\wp(X \cup Y)) : x \in X, y \in Y\}$ topluluğu

$$\{z \in \wp(\wp(X \cup Y)) : \varphi(z)\}$$

ile ifade edilebilir. Bu sayede yukarıda ifade edilen aksiyomdan dolayı bu topluluk yani $X \times Y$ bir kümedir.

5. *Bir $x \in \omega$ için $y = S(x)$ koşulunu sağlayan bütün (x, y) ikililerinin topluluğu $\omega \times \omega$'nin bir altkümesidir.* (7 pts.)

Proof: Sadece $\{(x, y) \in \omega \times \omega : y = S(x)\}$ topluluğunun bir küme olduğunu göstermemiz gerekiyor. $\omega \times \omega$'nin bir küme olduğunu bildiğimiz için $y = S(x)$'i bir $\varphi(z)$ formülüyle ifade etmemiz yeterli olacaktır.

$\varepsilon(x, y, z)$ önermesi,

$$\forall t\,(t \in z \leftrightarrow t \in x \vee t \in y)$$

olsun. $\varepsilon(x, y, z)$ ancak ve ancak $z = x \cup y$ iken sağlanır.

$\psi(x, y)$ önermesi,

$$\exists t\,(\alpha(x, t) \wedge \varepsilon(x, t, y))$$

olsun. (burada α önceki sorudaki gibi) Bu durumda $\psi(x, y)$ ancak ve ancak $y = x \cup \{x\} = S(x)$ ise sağlanır.

Demek ki $\{(x, y) \in \omega \times \omega : y = S(x)\}$ topluluğu aynı zamanda

$$\{z \in \omega \times \omega : \exists x\, \exists y\, (\gamma(x, y, z) \wedge \psi(x, y)\}$$

ile ifade edilebilir, (burada γ önceki sorudaki formül gibidir) ve dolayısıyla da 3'üncü aksiyomdan dolayı topluluk bir kümedir.

6. *Her $n, m \in \omega$ için eğer $n \in m$ ise $n \subseteq m$.* (7 pts.)

Proof: m üzerine tümevarım yapalım. Eğer $m = 0$ ise önermenin doğru olduğu barizdir. Önermenin m.için doğru olduğunu kabul edelim. $n \in S(m) = m \cup \{m\}$ olsun. Ya $n \in m$ ya da $n \in \{m\}$ olmalıdır. Birinci durumda tümevarım hipotezinden $n \subseteq m$ dir çünkü $m \subseteq m \cup \{m\} = S(m)$ dir ve bu durumda da $n \subseteq S(m)$ elde ederiz. İkinci durumda da $m = n$ ve yine $n = m \subseteq m \cup \{m\} = S(m)$ elde edilir.

7. *Her $n, m \in \omega$ için eğer $S(n) = S(m)$ ise ya $n \in m$ ya da $n = m$ olur.* (7 pts.)

Proof: $S(n) = S(m)$ olduğunu kabul edelim. Tanım gereği, $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$ olur. n, $n \cup \{n\}$ kümesinin bir elemanı olduğu için $n \in m \cup \{m\}$ olmalıdır. Dolayısıyla ya $n \in m$ ya da $n \in \{m\}$ olur. İkinci durumda $n = m$ elde edilir.

8. *$S : \omega \rightarrow \omega$ birebir bir fonksiyon olduğunu gösterin.* (7 pts.)

Proof: $n, m \in \omega$ olsun. $S(n) = S(m)$ ama $n \neq m$ olduğunu kabul edelim. 7. sorudan ya $n \in m$ ya da $n = m$ olmalıdır. Ayrıca $n \in m$ dir ve 6. sorudan, $n \subseteq m$ çıkar. Simetriden dolayı $m \subseteq n$ de gösterilmiş olur. Yani $n = m$ dir.

9. $S(\omega) = \omega \setminus \{0\}$ olduğunu gösteriniz. (7 pts. **Note:** Burada $S(\omega)$, ω'nun fonksiyon altındaki görüntüsüdür.)

Proof: $S(n) = n \cup \{n\}$ olduğu için $S(n)$ asla boş olamaz. Diğer taraftan her $n \in \omega$, ya $n = 0$ ya da bir $m \in \omega$ için $n = S(m)$ olduğunu göstereceğiz. Tümevarım yapıyoruz. Eğer $n = 0$ ise önermenin doğru olduğu barizdir. n için kabul edelim ve $S(n)$ için gösterelim. Yani S(n) in bir m için S-imgesinde olduğunu söylemek istiyoruz. Fakat tabiki $S(n)$ birseyin S altındaki görüntüsü ki o da n...

10. *Her* $n \in \omega$ *için* $n \notin n$. (7 pts.)

Proof: n üzerine tümevarım yapacağız. Eğer $n = 0$ ise $n = \emptyset$ ve tabii ki $n \notin n$. Şimdi $n \notin n$ olduğunu varsayalım ve $S(n) \notin S(n)$ olduğunu gösterelim.$S(n) \in S(n) = n \cup \{n\}$ olduğunu farzedelim. Bu durumda ya $S(n) \in n$ ya da $S(n) = n$ olmalıdır. Fakat 6. sorudan dolayı her iki durumda da $S(n) \subseteq n$ olur. Fakat, $n \in n \cup \{n\} = S(n)$, olduğu için bu $n \in n$ olmasını gerektirir, çelişki.

11. *Her* $n, m \in \omega$ *için* $n < m$ *ilişkisini* $n \in m$ *olarak tanımlanan ikili ilişkinin* ω *üzerinde bir sıralama tanımladığını gösterin* (7 pts.)

Proof: Her $n, m, k \in \omega$ için

a) $n \notin n$

ve

b) $n \in m$ ve $m \in k$ ise $n \in k$.

Birincisini 10. sorudan çıkartabiliyoruz. Şimdi $n \in m \in k$ olsun. 6. sorudan, $n \in m \subseteq k$ *dir*. Dolayısı ile $n \in k$ *olmalıdır*.

12. Bu sıralamanın < *bir tamsıralama olduğunu gösterin*. (7 pts.)

Proof: Aşağıdaki önsava ihtiyacımız var.

Önsav: *Her* $n, m \in \omega$ *için* $n \in m$ *ise ya* $S(n) \in m$ *ya da* $S(n) = m$ *dir*.

Proof: m üzerine tümevarım yapalım. $m = 0$ ise ispatlanacak birsey yok. Şu andan sonra m'nin aşağıdaki önermeyle verilmiş olduğunu düşünelim.

Her $n \in \omega$ için eğer $n \in m$ *ise ya* $S(n) \in m$ ya da $S(n) = m$ olmalıdır.

Her $n \in \omega$ için $n \in S(m)$ ise ya $S(n) \in S(m)$ ya da $S(n) = S(m)$ olmalıdır.

$n \in S(m)$ herhangi bir eleman olsun. Ya $S(n) \in S(m)$ ya da $S(n) = S(m)$ olduğunu göstereceğiz. $n \in S(m) = m \cup \{m\}$ olduğu için ya $n \in m$ ya da $n = m$ olmalıdır. İkinci durumda da $S(n) = S(m)$ dir. Birinci durumda ise, tümevarım hipotezinden, ya $S(n) \in m$ ya da $S(n) = m$ ve her iki durumda da $S(n) \in S(m)$ dir. Bu, önsavın ispatını tamamlar.

Şimdi

her $m \in \omega$ için ya $n \in m$ ya $n = m$ ya da $m \in n$

önermesini n üzerine tümevarımdan gösteriyoruz. Önce $n = 0$ olduğunu düşünelim ve bir $m \in \omega$ seçelim. $m \in 0$ durumu imkansız olduğundan aslında göstermemiz gereken şey

ya $0 = m$ ya da $0 \in m$.

Bunu m üzerine tümevarım ile ispat edeceğiz. $m = 0$ ise ispat edecek bir şey yok. Diyelim ki bu m için sağlandı, $S(m)$ için göstermeliyiz. Eğer $m = 0$, $0 = m \in S(m)$. Eğer $m \neq 0$, ise $0 \in m \subseteq S(m)$. Dolayısı ile ifade $n = 0$ için doğrulanmş oldu.

Şimdi farzedelim ki

her m için ya $n \in m$ ya $n = m$ ya da $m \in n$.

Aynı önermenin $S(n)$ için de doğru olduğunu göstermek istiyoruz. Yani her m için ya $S(n) \in m$ ya $S(n) = m$ ya da $m \in S(n)$.
$m \in \omega$ herhangi bir eleman olsun.Tümevarım hipotezine göre üç ihtimal var.

$$n \in m \text{ ya } n = m \text{ ya da } m \in n.$$

İkinci durumda, $m = n \in S(n)$ ve işimiz bitti.
Üçüncü durumda, $m \in n \subseteq S(n)$ ve işimiz yine bitti.
Sadece $n \in m$ olan birinci durum kaldı. Fakat bu durumu da zaten lemma ile halletmiştik.

13. *Bu sıralamada* ω'*nın boş olmayan her altkümesinin bir en küçük elemanı vardır*. (8 pts.)

Proof: X, ω'nın boş olmayan bir altkümesi olsun. X'in bir en küçük elemanının olmadığını farzedelim. Öncelikle n üzerine tümevarım ile

$$\text{her } m < n \text{ için } m \notin X \text{ için.}$$

$n = 0$ için bariz bir şekilde doğru. Diyelim ki önerme n için doğru. $m < S(n)$ olsun. $m \in S(n) = n \cup \{n\}$ ve ya $m \in n$ ya da $m = n$. Birinci durumda $m < n$ ve tümevarımla m X'in bir elemanı olamaz. İkinci durumda eğer n, X'in bir elemanı olmuş olsaydı o zaman n, X'in en küçük elemanı olurdu. Tümevarım hipotezinden dolayı $n \notin X$ de olmak zorundadır.. Dolayısı ile önerme ispatlanmış oldu. Şimdi $X = \varnothing$ ve $n \in X$ olsun. Simdi de $n < S(n)$ ise az önce ispat ettiğimiz önerme $S(n)$ için yanlıştır, çelişki. Dolayısı ile $X = \varnothing$.

14. ω'*nın boş olmayan her altkümesi* X *için öyle bir* $x \in X$ *vardır ki* $x \cap X = \varnothing$. (8 pts.)

Proof: x, X'in en küçük elemanı olsun. Eğer $y \in x \cap X$ ise y de X'in bir elemanı olur ve x,'den küçüktür, çelişki. Dolayısı ile $x \cap X = \varnothing$.