Math 111 (Kümeler teorisi)

Final sınavı (Sıralı kümeler üzerine)

Haziran 2001

Ali Nesin

Üzerinde $<$ ikili ilişkisi tanımlanan bir küme eğer

$$\forall x\ \neg(x < x)$$
$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$$

koşullarını sağlıyorsa o kümeye ikili ilişkiyle birlikte bir **sıralı küme** denir.

Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ve onun ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}^{>0}$, $\mathbb{R}^{>0}$ gibi) altkümeleri (doğal sıralamayla sıralanmış) sıralı kümeler olarak incelenecek.

S herhangi bir küme ise onun tüm altkümeleri kümesi $\wp(S)$ ile gösterilecek. $\wp(S)$ kümesini içindelik ilişkisiyle sıralanmış olarak ele alacağız.

$(X, <)$ sıralı bir küme olsun. A, X in bir altkümesi olsun. Eğer X'in her $x < y$ elemanları için $x < a < y$ olacak şekilde bir $a \in A$ varsa, A'ya X'te **yoğun** denir.

1. "Yoğun olmak" sıralı kümeler arasında geçişken bir ilişki midir? Başka bir deyişle, eğer $A \subseteq B \subseteq C \subseteq X$ ise ve A, B'de yoğunsa ve B de C'de yoğunsa A, C'de yoğun mudur?

2. $\{x/y \in \mathbb{Q} : x, y \in \mathbb{Z}$ aralarında asal ve y tek sayı$\}$ kümesi $\mathbb{Q}$'da yoğun mudur?

3. Bir sıralı kümenin iki yoğun alt kümesinin kesişiminin de yoğun olduğu her zaman doğru mudur?

Sıralı $(X, <)$ kümesinden sıralı $(Y, \prec)$ kümesine giden f **morfizması** tüm $a, b \in X$ için

$a < b \Leftrightarrow f(a) \prec f(b)$ koşulunu sağlayan, X den Y ye giden bir fonksiyondur.

$X = Y$ durumunda, birebir ve örten bir morfizmaya **otomorfizma** denir. Örneğin, birim fonksiyon her zaman bir otomorfizmadır.

3. Bir otomorfizmanın tersi yine bir otomorfizmadır, gösterin.

4. İki morfizmanın bileşkesinin de bir morfizma olduğunu gösterin.

5. a ve $b \in \mathbb{Q}$ olsun. $\varphi_{a,b}(x) = ax + b$ şeklinde tanımlanan $\varphi_{a,b} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonunun morfizma olabilmesi için a ve b üzerine konulacak gerek ve yeter koşullar nelerdir? $\varphi_{a,b} \circ \varphi_{c,d}$ fonksiyonu hesaplayın: Öyle e ve f rasyonel sayıları bulun ki $\varphi_{a,b} \circ \varphi_{c,d}. = \varphi_{e,f}$ olsun.

11. $f : \mathbb{Q}^{>0} \rightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonunu

$$f(q) = \begin{cases} -1/q, & 0 < q < 1 \\ q - 2, & 1 > q \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. f 'nin birebir bir morfizma olduğunu gösterin.

12. f , X sıralı kümesinin bir otomorfizması olsun. X'in bir minimal elemanı olduğunu varsayalım, bu elemana a diyelim. O zaman $f(a)$ da X'in bir minimal elemanı olduğunu gösterin.

13. f, X in bir otomorfizması olsun. X'te $\{x \in X : a < x\}$ kümesi tek bir elemandan oluşacak şekilde bir a elemanı olduğunu varsayalım. $f(a)$'nın da aynı özelliğe sahip olduğunu gösterin.

14. $\wp(2)$'nin tüm otomorfizmalarını bulun.(Burada $2 = \{0, 1\}$ dir.)

15. $\wp(3)$'ün tüm otomorfizmalarını bulun.

16. S bir küme ve f de S'den S'ye giden birebir ve örten bir fonksiyon olsun. $\varphi_f : \wp(S) \to \wp(S)$ fonksiyonunu $\varphi_f(A) = f(A)$ ile tanımlayalım. φ_f , $\wp(S)$'nin bir otomorfizmasıdır, gösterin. $\varphi_f \circ \varphi_g$ nedir? Tersine, $\wp(S)$ nin herhangi bir otomorfizmasının S nin birebir, örten bir fonksiyonu için φ_f formunda olduğunu gösterin.

17. $(X, <)$ iyi sıralanmış bir küme olsun. Herhangi $f : X \to X$ morfizması her $x \in X$ için $f(x) \geq x$ eşitsizliğini sağlar, gösterin.

18. $\mathbb{N}$'nin tüm otomorfizmalarını bulun.

19. $\mathbb{Z}$'nin tüm otomorfizmalarını bulun.

20. $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{Z}$'ye tanımlanmış otomorfizma olmayan bir morfizma bulun.

Örten bir morfizmaya **izomorfizma** denir. Eğer iki sıralı küme arasında bir izomorfizma varsa bu iki küme **izomorfiktir**, denir.

21. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ izomorfik midir?

22. $\mathbb{R}^{\geq 0}$ ve $\mathbb{R}$ izomorfik midir?

23. $\mathbb{R}^{>0}$ ve $\mathbb{R}$ izomorfik midir?

24. $(0, 1)$ açık aralığı ile $\mathbb{R}$ izomorfik midir?

25. $\mathbb{Q}$'nun sayılamaz sonsuzlukta otomorfizması olduğunu gösterin.

26. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesini şu şekilde sıralayalım: $(x, y) \leq (z, t) \Leftrightarrow (x \leq z$ ve $y \leq t)$ (O zaman, $<$ eşitsizliği $(x, y) < (z, t) \Leftrightarrow (x, y) \leq (z, t)$ ve $(x, y) \neq (z, t)$ olarak tanımlanır). $\alpha(x, y) = (y, x)$ ile tanımlanan $\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ fonksiyonu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin bir otomorfizmasıdır. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin otomorfizmalarının sadece $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ ve α olduğunu gösterin.

27. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$'yi yukarıdaki gibi sıralayalım. $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. $\tau_{a,b}(x, y) = (x + a, y + b)$ ile tanımlanan $\tau_{a,b}$ fonsiyonunun $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nin bir otomorfizmasını tanımladığınıgösterin. $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nin otomorfizmalarının kümesi olsun. α yukarıdaki gibi tanımlanmış iken

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \{\tau_{a,b} : a, b \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha \circ \tau_{a,b} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

olduğunu gösterin.