Math 111
Telafi Sınavı

Ali Nesin

Ocak 2004

Önemli not. Ya türkçe ya İngilizce yazın ama her iki durumda da tam cümleler kurun. Noktalamaya dikkat edin. $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\exists$, $\forall$ gibi semboller kullanmayın. Bu sembollerin her kullanımı için 1 puan kıracağım. Cevaplarınızı açıklayın ama gereksi metinler yüzünden not kıracağım. Açıklanmamış bir cevap doğru olsa bile 0 puan alacaktır.

I. Geçişken ilişkiler. X bir küme olsun. X üzerinde bir **ikili ilişki** sadece $X \times X$'in bir altkümesidir.

X üzerindeki bir R ilişkisine eğer her x, y, $z \in X$ için $(x, y) \in R$ ve $(y, z) \in R$ olduğunda $(x, z) \in R$ oluyorsa **geçişken** denir. .

i. Aşağıdakilerden hangileri herhangi bir X kümesi üzerinde geçişken bir ilişki tanımalr? Açıklayın. (0 ya da 4 puan)

   i. $X \times X$.

   ii. $\emptyset$.

   iii. $\{(x, x) : x \in X\}$.

   iv. $\{(x, y) \in X^2 : x \neq y\}$.

ii. Aşağıdakilerden hangileri $\mathbb{N}$ üzerinde geçişken bir ilişki tanımlar? Açıklayın. (0 ya da 4 puan)

   i. $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 5 \text{ böler } x - y\}$.

   ii. $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 5 \text{ böler } x + y\}$.

   iii. $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 5 > x - y\}$.

   iv. $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 12 < x - y\}$.

iii. X üzerinde geçişken ilişkilerden oluşan bir kümenin kesişiminin de geçişken olduğunu gösterin. (4 puan)

iv. X üzerinde herhangi bir R ilişkisini içeren tüm geçişken ilişkilerin kesişimi R^t'nin R'yi içeren en küçük geçişken ilişki olduğunu gösterin. (10 puan)

v. R ve S iki ikili ilişkiyse $(R \cap S)^t \subseteq R^t \cap S^t$ olduğunu gösterin. (8 puan)

vi. R ikili bir ilişki olsun. Bu kümenin

$$\{S := (x, y) \in X^2 : \exists x = y_1,\, y_2, \ldots, y_n = y \in X \text{ öyle ki}$$
$$(y_i, y_i + 1) \in R \text{ for all } i = 1, \ldots, n-1\}$$

R'yi içeren geçişken bir ilişki olduğunu gösterin. Buradan $R^t = S$ sonucuna ulaşın. (10 puan)

vii. Genel olarak $(R \cap S)^t \neq R^t \cap S^t$ olduğunu kanıtlayın. (5 puan)

II. Kısmi Sıralamalar. X üzerindeki bir $<$ ilişkine eğer şu koşulları sağlıyorsa bir **kısmi sıralama** denir: ($(x, y) \in <$ yerine $x < y$ yazıyoruz),

PO1. Antiyansıma. Her $x \in X$ için $x \not< x$.

ve

PO2. Geçişkenlik. Her x, y, $z \in X$ için eğer $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$.

Eğer $x < y$ or $x = y$ ise $x \leq y$ yazacağız.

$(X, <)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. Bir $u \in X$ elemanına eğer her $a \in A$ için $a \leq u$ koşulunu sağlıyorsa A'nın bir üst sınırı denir. Bir $v \in X$ elemanına eğer i) v, A'nın bir üst sınırıysa ve ii) A'nın her üst sınırı u için eğer $u \leq v$ ise $u = v$ koşulu sağlanıyorsa A'nın bir **en küçük üst sınırı** denir.

i. Şu koşulları sağlayan birer $(X, <)$ kısmi sıralaması ve A kümesi bulun.

i. A'nın bir en küçük üst sınırı var ve A'da değil.

ii. A'nın tam iki en küçük üst sınırı var.

iii. A'nın en küçük üst sınırı yok.

iv. A'nın A'da olan bir en küçük üst sınırı var. (4 puan)

ii. $(X, <)$ bir kısmi sıralı küme olsun ve A da X'in bir altkümesi olsun. A'nın gene A'da olan bir en küçük üst sınırı olduğunu varsayalım. Bu durumda A'nın sadece bir en küçük üst sınırı olduğunu gösterin. (2 puan)

iii. $(X, <)$ bir kısmi sıralı küme olsun. X'in herhangi bir elemanının $\emptyset$'ın bir üst sınırı olduğunu gösterin. (2 puan)

iv. $(X, <)$ bir kısmi sıralı küme olsun. $\emptyset$'nin bir en küçük üst sınırı varsa $(X, <)$ hakkında ne söyleyebilirsiniz? (2 puan)

v. U bir küme ve $X = \wp(U)$ olsun. X'i kapsamayla sıralayalım. Bunun X üzerinde bir kısmi sıralama olduğunu gösterin. (2 puan) X'in her altkümesinin bir en küçük üst sınırı olduğunu gösterin. (5 puan)

vi. $(X,<)$ bir kısmi sıralı küme olsun. Diyelim ki her $a,\ b \in X$ için $\{a,b\}$ kümesinin bir tek en küçük üst sınırı var. $a \vee b$ bu en küçük üst sınırı göstersin.

i. Bu özelliği sağlayan sonsuz bir kısmi sıralı küme örneği verin. (2 puan)

ii. KAnıtlayın ya da tersini kanıtlayın: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ her $a,\ b,\ c \in X$ için. (10 puan)

III. Doğrusal sıralamalar. Bir kısmi sıralamaya eğer PO1 ve PO2'den başka

PO3 Her $x,\ y \in X$ için ya $x < y$ ya $x = y$ ya da $y < x$ doğrudur

özelliğini sağlıyorsa **doğrusal sıralama** denir.

i. Eğer $(X,<)$ doğrusal sıralamaysa ve A, X'in en küçük üst sınırı olan bir altkümesiyse, bu altkümenin tek olduğunu kanıtlayın. (4 puan)

IV. İyi sıralı kümeler. Eğer bir doğrusal $(X,<)$ sıralamasının her boş olmayan altkümesinin bir minimal elemanı varsa $(X,<)$ sıralamasına **iyi sıralama** denir.

i. Sonlu ve sonsuz iyi sıralı küme örnekleri verin. (2 puan)

ii. $X = \mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{N} \times \{1\}$ olsun. X üzerinde $<$ ilişkisini şöyle tanımlayalım: her $x,\ y \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{array}{lll} (x,0) < (y,0) & \text{ancak ve ancak} & x < y \\ (x,1) < (y,1) & \text{ancak ve ancak} & x < y \\ (x,0) < (y,1) & \text{hep doğru} & \end{array}$$

i. $(X,<)$ doğrusal sıralı mı? (2 puan)

ii. $(X,<)$ iyi sıralı mı? (2 puan)

iii. $\{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ doğal sıralamasıyla iyi sıralı mı? (2 puan)

iv. $\{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$ doğal sıralamasıyla iyi sıralı mı? (2 puan)

v. Maksimal elemanlı sonsuz bir iyi sıralama bulun. (4 puan)

vi. İyi sıralı bir X kümesinde boş olmayan altkümelerin minimal elemanlarını tek olduğunu gösterin. (2 puan)

vii. Her boş olmayan iyi sıralı kümenin tek bir minimal elemanı olduğunu gösterin. (2 puan)

viii. $(X,<)$ iyi sıralı bir küme olsun. X'in en fazla bir elemanı dışında tüm x elemanlarının şu özelliği sağladığını gösterin: "Öyle bir y var ki $x < y$ ve her z için eğer $x < z$ ise $y < z$". (5 puan) Böyle bir y'nin varsa tek olduğunu gösterin. (3 puan)