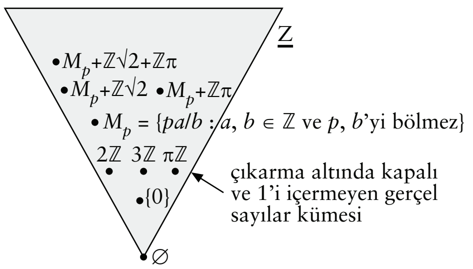
23. Zorn Önsavı ve Birkaç Sonucu

Okurun bir önceki bölümü okuduğunu ve orada ortaya konulan sorunu anladığını varsayıyoruz. O bölümde ele aldığımız ama pek başarılı olamadığımız kanıtlama yönteminden, yani bir kümenin belli koşullara sahip maksimal bir altkümesinin varlığını gösterme çabamızdan sözedeceğiz bu bölümde.

Geçen bölümde, son örnekte, çıkarma altında kapalı olan ve 1'i içermeyen gerçel sayılar kümelerini ele almıştık. Bu bölümün en azından başında $\mathbb{R}$'nin bu tür altkümelerine yoğunlaşalım. $\mathbb{R}$'nin bu tür altkümelerini eleman olarak içeren kümeye $\mathcal{Z}$ adını verelim. Uzunca bir süre bu örnekle uğraşacağız.



Yukardaki şekilde $\mathcal{Z}$'yi çizdik. Altkümeleri aşağıya, üstkümeleri yukarıya yazdık, yani $\mathcal{Z}$'nin elemanlarının (altküme ilişkisine göre aşağıdan yukarıya doğru) sıralanmasına dikkat ettik: $A \subset B$ ise A'yı alta B'yi yukarıya yazdık. Dolayısıyla boşkümeyi en alta koyduk. Bunun bir üstünde $\mathcal{Z}$'nin tek sonlu elemanı olan $\{0\}$ kümesi var. Daha yukarda 1 ve -1 dışındaki a sayılarının katlarından oluşan $a\mathbb{Z}$ kümeleri var. Resimde göstermedik ama bir üst katta $\sqrt{2}\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ gibi iki elemanla "gerilen" çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ kümeleri var. (Soru: $\sqrt{2}\mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$ kümesi $\mathcal{Z}$'de midir?) Resimde bir de M_p diye bir küme var, tanımına bakılırsa 1'i içermiyor ve çıkarma altında kapalı, yani $\mathcal{Z}$'de. Velhasıl, $\mathbb{R}$'nin çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen her altkümesi $\mathcal{Z}$'nin bir elemanı ve bu altkümeler küçükten büyüğe doğru dizilmişler.

$\mathcal{Z}$ kümesinin "zincir özelliği" adı verilen şu özelliği var:

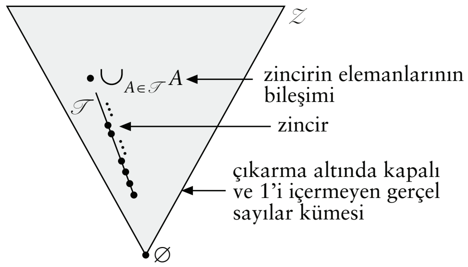
> *Eğer $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}$ ise ve her A, $B \in \mathcal{T}$ için ya $A \subseteq B$ ya da $B \subseteq A$ ise, o zaman $\mathcal{T}$'nin elemanlarının bileşimi olan $\bigcup_{X \in \mathcal{T}} X$ kümesi de $\mathcal{Z}$'dedir.*

Bunun kanıtı oldukça kolay. Eğer $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesi 1'i içerseydi, $\mathcal{T}$'nin bir A elemanı da 1'i içermek zorunda olurdu ki, bu imkânsız, çünkü $A \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}$. Demek ki $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesi 1'i içeremez. Şimdi $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesinin çıkarma altında kapalı olduğunu kanıtlayalım. a ve b, $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesinden iki eleman olsun. O zaman, $a \in A$ ve $b \in B$ ilişkilerinin doğru olduğu A, $B \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. $\mathcal{T}$'nin zincir özelliğinden dolayı ya $A \subseteq B$ ya da $B \subseteq A$ olmalı. a ve b açısından durum simetrik olduğundan, $B \subseteq A$ ilişkisini kabul etmede bir mahsur yok. O zaman $b \in B \subseteq A$ ve hem a hem de b, A'nın birer elemanı. Ama A çıkarma altında kapalı bir küme. Demek ki $a - b \in A$. Öte yandan, A elbette $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesinin bir altkümesi. Sonuç: $a - b \in \bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ ve $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesi çıkarma altında kapalı.

$\mathcal{Z}$'nin, "her A, $B \in \mathcal{T}$ için ya $A \subseteq B$ ya da $B \subseteq A$" özelliğini sağlayan $\mathcal{T}$ altkümelerine ***zincir*** diyelim. O zaman yukardaki özellik şöyle okunur:

$\mathcal{Z}$'nin her zincirinin bileşimi gene $\mathcal{Z}$'dedir.

Geçen bölümde, bu özelliği, $\mathcal{Z}$'nin sayılabilir sonsuzlukta elemanı olan zincirleri için kullanmıştık. Birazdan yazacağımız Zorn Önsavı'nda $\mathcal{Z}$'nin sayılabilir ya da sayılamaz sonsuzluktaki tüm zincirlerini ele almamız gerekecek.

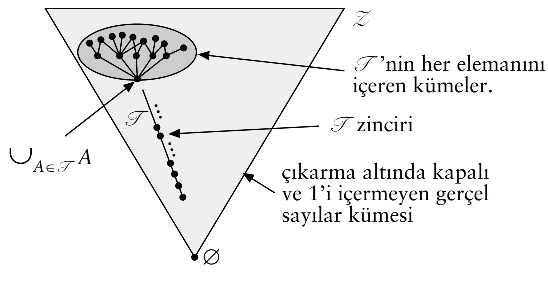


Bu arada, $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesinin kimileyin $\bigcup \mathcal{T}$ olarak yazıldığını da anımsatalım. Bu tıkız yazılım, simge sayısında hatırı sayılır bir indirim sağlar.

Birazdan ifade edeceğimiz Zorn Önsavı için "$\mathcal{Z}$'nin her zincirinin bileşimi gene $\mathcal{Z}$'dedir" özelliğinden daha zayıf bir özellik gerekir. İşte o özellik:

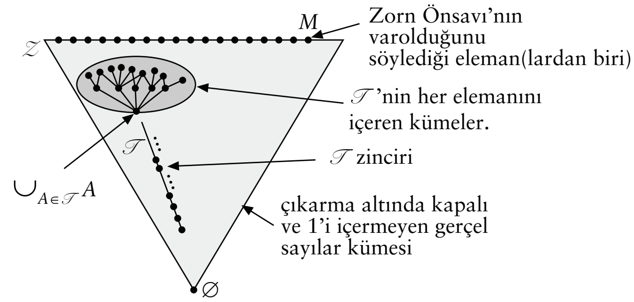
> *$\mathcal{T}$, $\mathcal{Z}$'nin herhangi bir zinciriyse, $\mathcal{Z}$'de $\mathcal{T}$'nin her elemanından büyükeşit bir eleman vardır.*

Yukardaki örnekte, eğer $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}$ bir zincirse, $\bigcup\mathcal{T}$, $\mathcal{Z}$'dedir ve $\mathcal{T}$'nin her elemanından büyükeşittir. (Eğer $A \subseteq B$ ise B'nin A'dan ***büyükeşit*** olduğunu söylüyoruz. Eğer $A \subset B$ ise B'nin A'dan ***büyük*** olduğunu söyleyeceğiz. Aslında, yukardaki şekilden de görüleceği üzere, $\bigcup \mathcal{T}$, $\mathcal{Z}$'de bulunan ve $\mathcal{T}$'nin her ele-



manından daha büyükeşit olan elemanların en küçüğüdür. Ama bu özelliğin bir önemi olmayacak bizim için.)

Birazdan tanıtacağımız Zorn Önsavı, eğer $\mathcal{Z}$ yukardaki son italik koşulu sağlıyorsa, o zaman $\mathcal{Z}$'nin en az bir maksimal elemanının olduğunu söyler. Yani, Zorn Önsavı, $\mathcal{Z}$ üzerine koşulan yukardaki italik koşul doğru olduğunda, öyle bir $M \in \mathcal{Z}$

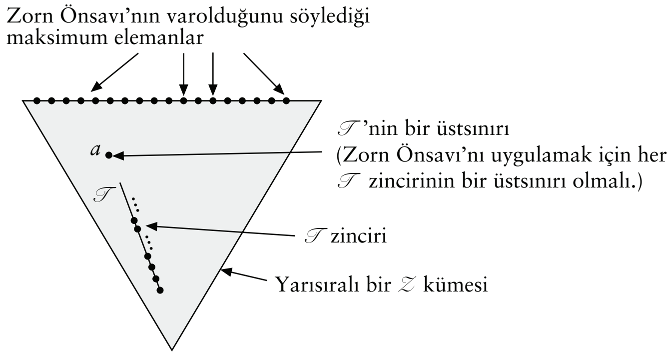


vardır ki, der, $\mathcal{Z}$'nin hiçbir elemanı M'den daha büyük olamaz, en fazla M'ye eşit olabilir. Ama dikkat: Bu maksimal elemanlardan sonsuz sayıda olabilir (ki çoğu zaman da öyledir).

23.1. Zorn Önsavı

Artık Zorn Önsavı'nı anlayacak bilgi birikimine sahibiz:

Zorn Önsavı 23.1. ($\mathcal{Z}$, $\le$) *yarısıralı bir küme olsun. Eğer* $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ *ise ve* $\mathcal{Z}$*'nin her zincirinin bir üstsınırı varsa o zaman* $\mathcal{Z}$*'nin maksimal bir elemanı vardır.*



Dikkat ederseniz, Zorn Önsavı, geçen bölümde yapmak isteyip de yapamadığımızı herhangi bir zahmete girmeksizin yapıyor. Bir tür sihirbazlık, ya da Tanrı'nın eli diyebilirsiniz.

Zorn Önsavı'nı daha sonraki bölümlerden birinde Seçim Aksiyomu'nu kullanarak kanıtlayacağız. Şimdilik Zorn Önsavı'nı kanıtlamadan kabul edip önsavı kullanan birkaç basit ama önemli örnek verelim.

İlk olarak, Zorn Önsavı'nı kullanarak, geçen bölümde bulmaya çalışıp bulamadığımız bir kümenin varlığını kanıtlayalım:

Teorem 23.2. *Gerçel sayılar kümesi* $\mathbb{R}$'*nin çıkarma altında kapalı ve* 1'*i içermeyen maksimal bir altkümesi vardır.*

Kanıt: Zorn Önsavı'nı kullanacağız.

$$\mathcal{Z} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ çıkarma altında kapalı ve } 1 \notin A\}$$

olsun. $\mathcal{Z}$'yi "altkümesi olmak" ilişkisiyle sıralayalım. Şimdi $(\mathcal{Z}, \subseteq)$ yarısıralamasının Zorn Önsavı'nın koşullarını sağladığını gösterelim. $\{0\} \in \mathcal{Z}$ olduğundan $\mathcal{Z} \neq \emptyset$. Şimdi ikinci koşulun sağlandığını kanıtlayalım. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}$ bir zincir olsun. $\cup\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$'nin her elemanının bir üstkümesi olduğundan, eğer $\cup\mathcal{T} \in \mathcal{Z}$ ise, $\cup\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$'nin bir üstsınırı olur. Dolayısıyla $\cup\mathcal{T} \in \mathcal{Z}$ önermesini kanıtlayalım. Bunun için iki şey kanıtlamalıyız:

1) $\cup\mathcal{T}$ çıkarma altında kapalı olmalı,

2) $\cup\mathcal{T}$, 1'i içermemeli.

Birinciden başlayalım. $x, y \in \cup\mathcal{T}$ olsun. Bu iki eleman $\mathcal{T}$'nin elemanlarından birindedir, ama ikisi birden aynı elemanda olmayabilir, en azından bundan henüz emin değiliz, birazdan olacağız ama... Diyelim, $A, B \in \mathcal{T}$ için, $x \in A$ ve $y \in B$. Ama $\mathcal{T}$ bir zincir olduğundan,

$$\text{ya } A \subseteq B \text{ ya da } B \subseteq A.$$

Durum x ve y açısından simetrik olduğundan, birinin diğerinden farkı yok, dolayısıyla gönül rahatlığıyla $A \subseteq B$ ilişkisini varsayabiliriz. Böylece, $x \in A \subseteq B$ olur. Demek ki hem x, hem de y, B'deler. Ama B çıkarma altında kapalı. Buradan $x - y \in B$ çıkar. Ama şimdi, $B \subseteq \cup\mathscr{T}$ olduğundan, $x - y \in \cup\mathscr{T}$ olur. Böylece $\cup\mathscr{T}$ kümesinin çıkarma altında kapalı olduğunu kanıtlamış olduk.

Şimdi, $1 \notin \cup\mathscr{T}$ önermesini kanıtlayalım. $\cup\mathscr{T}$ kümesinin elemanları $\mathscr{T}$'nin elemanlarının elemanlarıdır; dolayısıyla 1, $\cup\mathscr{T}$ kümesinde olsaydı, 1, $\mathscr{T}$ kümesinin bir elemanının elemanı olurdu. Ama $\mathscr{T}$'nin hiçbir elemanı 1'i içermez. Dolayısıyla, 1 de $\cup\mathscr{T}$ kümesinde olamaz. □

Notlar.

1) Zorn Önsavı'nda $\mathscr{Z} \neq \emptyset$ koşulunu kanıtlamak genel olarak kolaydır ama gene de unutulmaması gerekir. Eğer $\mathscr{Z}$ boşkümeyse, $\mathscr{Z}$'nin maksimal bir eleman barındırma şansı yoktur!

2) Uygulamada çoğu zaman $\mathscr{Z}$ bir kümeler kümesidir ve yarısıralama da $\subseteq$ tarafından verilmiştir. Bu arada, $\mathscr{Z}$'de bir yarısıralama tanımlanmamışsa önsavı uygulayamayacağınıza dikkatinizi çekerim.

3) Uygulamada çoğu zaman $\mathscr{Z}$'nin bir $\mathscr{T}$ zincirinin en küçük üstsınırı bulunmaya çalışılır.

4) Zorn Önsavı'nın var olduğunu söylediği maksimal elemanı görebiliyorsanız, yani açık açık tanımını yazabiliyorsanız ya da diğer maksimal elemanlardan ayırdedebiliyorsanız, o zaman Zorn Önsavı'nı gereksiz yere kullanmışsınız demektir, maksimal elemanın varlığını Zorn Önsavı'nı kullanmadan da kanıtlayabilirdiniz.

Örneğin, Zorn Önsavı yardımıyla yukarda varlığı kanıtlanan $\mathbb{R}$'nin çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir altkümesini açık açık yazamazsınız. Zorn Önsavı doğruysa böyle maksimal bir altküme vardır ama birini bile "işte budur" diye gösteremezsiniz.

5) Zorn Önsavı'nın var olduğunu söylediği maksimal elemandan sadece bir tane varsa da, Zorn Önsavı gereksiz yere kullanılmış demektir.

6) Zorn Önsavı'nın varsayımlarını sağlayan $\mathcal{Z}$ kümelerine talihsiz bir şekilde ***tümevarımsal*** küme denir. [Sİ]'de verdiğimiz tümevarımsal küme tanımıyla karıştırılmamalı.

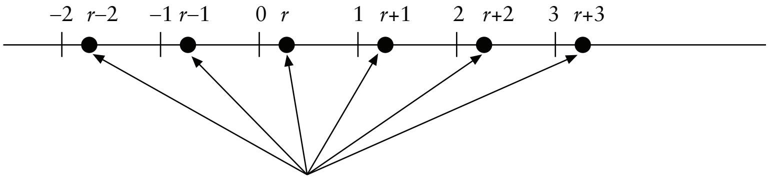
Zorn Önsavı uygulaması olarak bir başka örnek verelim. Bu örneği aslında Bölüm 18'de (Örnek 7 ve 8) yapmıştık ama orada problemi biraz değişik bir dilde ifade etmiştik.

Eğer iki r ve s gerçel sayısı arasındaki fark tamsayıysa bu iki gerçel sayıya birbirine ***denk*** diyelim ve bunu $r \equiv s$ olarak gösterelim. Demek ki,

$$r \equiv s \Leftrightarrow r - s \in \mathbb{Z}.$$

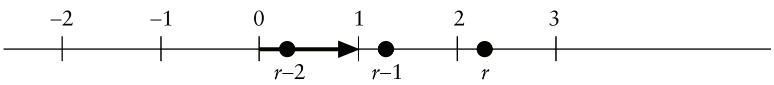
Örneğin, π, $\pi + 1$, $\pi + 2$, $\pi - 3$ sayıları birbirine denktir. π'ye denk gerçel sayılar belli bir $n \in \mathbb{Z}$ tamsayısı için $\pi + n$ olarak yazılan sayılardır. Bu, daha genel olarak doğrudur, her r gerçel sayısı için, r'ye denk gerçel sayılar, belli bir $n \in \mathbb{Z}$ için $r + n$ olarak yazılan sayılardır.

Şimdi amacımız, öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}$ kümesi bulmak ki, her $r \in \mathbb{R}$ için, $r \equiv x$ denkliğinin doğru olduğu bir ve bir tek $x \in X$ olsun. Böyle bir X kümesi kolaylıkla bulunabilir, örneğin $X = [0, 1)$ ya-



Birbirine denk sayılar

rı açık aralığı istediğimiz özelliği sağlar. Nitekim, eğer bir r gerçel sayısı verilmişse, r'ye yeterince 1 ekleyerek ya da r'den yeterince 1 çıkararak, $[0, 1)$ aralığında r'ye denk bir sayıya ulaşırız ve $[0, 1)$ aralığında r'ye denk başka bir sayı da yoktur.



$r \equiv r - 2 \in [0, 1)$

Şu basit teoremi kanıtladık:

Teorem 23.3. *Öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}$ vardır ki, her $r \in \mathbb{R}$ için $r - x$'in tamsayı olduğu bir ve bir tek $x \in X$ vardır.* ($X = [0, 1)$ *alınabilir.*)

Yukardaki basit teoremde $\mathbb{Z}$ yerine $\mathbb{Q}$ koyarsak teorem çok daha çetin bir önermeye dönüşür:

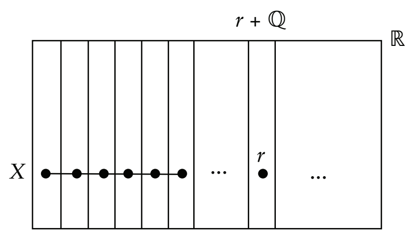
Teorem 23.4. *Öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}$ vardır ki, her $r \in \mathbb{R}$ için $r - x$ sayısının kesirli bir sayı olduğu bir ve bir tek $x \in X$ vardır.*

Kanıt: $\mathbb{R}$ kümesi üzerine $\equiv$ ilişkisini,

$$r \equiv s \Leftrightarrow r - s \in \mathbb{Q}$$

olarak tanımlayalım. Daha önceki $\mathbb{Z}$ burada $\mathbb{Q}$ oldu. Ama bu sefer, $[0, 1)$ aralığı gibi açık seçik bir yanıtı yok bu sorunun.

Öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}$ kümesi bulmak istiyoruz ki, her $r \in \mathbb{R}$ için, $r \equiv x$ denkliğinin doğru olduğu bir ve bir tek $x \in X$ olsun.



Böyle bir X kümesi vardır. Hem de çok vardır. Ama biri bile bulunamaz!

X kümesinin varlığını hemen kanıtlayalım. Kanıtta (zorunlu olarak) Zorn Önsavı'nı kullanacağız. (Aslında aynı kanıt Seçim Aksiyomu kullanılarak çok daha basit bir biçimde yapılabilir ama vereceğimiz kanıt Zorn Önsavı'nın kullanıldığı kanıtların tipik özelliklerini taşıdığından, kanıtımızı önemsiyoruz.)

$\mathcal{Z} = \{X \subseteq \mathbb{R} : X$'in iki değişik elemanı birbirine denk olamaz$\}$ olsun. Yani $X \in \mathcal{Z}$ ise, X'in iki değişik elemanının farkı $\mathbb{Q}$'de olamaz. $\mathcal{Z}$'yi "altküme olma" ilişkisiyle sıralandıralım. Bakalım $\mathscr{Z}$, Zorn Önsavı'nın koşullarını sağlıyor mu?

Boşküme ve tek elemanlı her sayı kümesi $\mathscr{Z}$'de olduğundan, $\mathscr{Z}$ boşküme değildir. Gözü örneğe doymayan okur, $\{1, \sqrt{2}\}$ kümesinin de $\mathscr{Z}$'de olduğunu kanıtlayabilir.

Şimdi $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{Z}$ bir zincir olsun. $\cup\mathscr{T}$'nin $\mathscr{Z}$'nin bir elemanı olduğunu kanıtlayacağız. x ve y, $\cup\mathscr{T}$ kümesinden iki değişik sayı olsun. Bu iki eleman $\mathscr{T}$'nin elemanlarından birinin elemanıdır. Diyelim, $A, B \in \mathscr{T}$ için, $x \in A$ ve $y \in B$. Ama $\mathscr{T}$ bir zincir olduğundan, ya $A \subseteq B$ ya da $B \subseteq A$. Durum x ve y açısından simetrik olduğundan, birinin diğerinden farkı yok, dolayısıyla gönül rahatlığıyla $A \subseteq B$ ilişkisini varsayabiliriz. Böylece, $x \in A \subseteq B$ olur. Demek ki hem x, hem de y, B'deler. B, $\mathscr{Z}$'de olduğundan x ve y denk olamazlar.

Demek ki $\mathscr{Z}$, Zorn Önsavı'nın önkoşullarını sağlıyor. Dolayısıyla Zorn Önsavı'na göre $\mathscr{Z}$'nin bir maksimal elemanı olmalı. Bu elemana X diyelim. Şimdi bu X'in dilediğimiz X olduğunu kanıtlayacağız.

$r \in \mathbb{R}$ olsun. Diyelim r'nin denk olduğu bir $x \in X$ yok. O zaman r, X'te olamaz. Şimdi $X_1 = X \cup \{r\}$ olsun. X_1, X'ten daha büyük olduğundan, X_1, $\mathscr{Z}$ kümesinde olamaz. Ama biz gene de X_1'in $\mathscr{Z}$'de olduğunu kanıtlama başarısında bulunacağız.

Eğer X_1, $\mathscr{Z}$'de olmasaydı, o zaman X_1'de $x \equiv y$ denkliğini sağlayan iki değişik x ve y elemanı olurdu.

$$X_1 = X \cup \{r\} \text{ ve } X \in \mathscr{Z}$$

olduğundan, hem x hem de y, X'te olamaz, demek ki ikisinden biri r'ye eşit olmalı. Diyelim $y = r$. Ama o zaman da $r \equiv x \in X$ olur, oysa biz böyle bir x'in olmadığını varsaymıştık. Bir çelişki. Demek ki böyle bir $r \in \mathbb{R}$ yok. Dolayısıyla $\mathbb{R}$'nin her elemanı X'in bir elemanına denktir.

Eğer $\mathbb{R}$'nin bir elemanı X'in iki elemanına denk olsaydı, o zaman X'in o iki elemanı birbirine denk olurdu, dolayısıyla $X \in \mathscr{Z}$ olduğundan, bu iki eleman birbirine eşit olurdu. Demek ki $\mathbb{R}$'nin her elemanı X'in bir ve bir tek elemanına denktir. Kanıtımız bitmiştir.