24. İyisıralama Teoremi

Niyazi Anıl Gezer

Bir kümenin elemanlarını tamsıralamak hiç de kolay değildir. Zorluğu kavramak için, doğal sayıların altkümelerinin kümesi olan $\wp(\mathbb{N})$'yi tamsıralamaya çalışalım. Kolay olmasa da mümkündür:

Her doğal sayı kümesine, birazdan örneklerle açıklayacağımız yöntemle, 0'la 1 arasında bir gerçel sayı iliştireceğiz; sonra da iliştirilen gerçel sayıları kullanarak doğal sayı kümelerini tamsıralayacağız.

Gerçel sayıları 11'lik tabanda yazalım. Rakamlarımız 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ve # olsun. Burada #, 10 "rakamı"nı simgelemektedir. Asal sayılar kümesine iliştirilen gerçel sayı

0,2#3#5#7#11#13#17#... ,

yani,

$$2/11 + 10/11^2 + 3/11^3 + 10/11^4 + 5/11^5 + 10/11^6 + 7/11^7 + 10/11^8 + 1/11^9 + 1/11^{10} + 10/11^{11} + \cdots$$

olsun. (Böyle bir toplama seri denir. Bu serinin eşit olduğu sayı, "serinin kısmi toplamları"nın limiti olarak tanımlanır. Kısmi toplamların da bir Cauchy dizisi olduğunu, dolayısıyla $\mathbb{R}$'de bir limiti olduğunu kanıtlamak zor değildir. Bkz [Sİ] ve [A].)

{3, 5} kümesine iliştirilen sayı ise (sonlu bir toplam olan)

$$0,3\#5\# = 3/11 + 10/11^2 + 5/11^3 + 10/11^4$$

sayısıdır. {35} kümesine iliştirilen sayı da

$$0,35\# = 3/11 + 5/11^2 + 10/11^3$$

olsun. Boşkümeye 0,# yani 10/11 sayısını iliştirelim. {0} kümesine ise $0,0\# = 10/11^2$ iliştirilmiştir. Bu yöntemle her doğal sayı kümesine bir ve bir tek gerçel sayıyla iliştirilir. Bir A doğal sayı kümesine karşılık gelen sayıya $n(A)$ diyelim. Şimdi A ve B doğal sayı kümelerini, bu kümelere karşılık gelen sayıların büyüklüğüne göre karşılaştırabiliriz:

$$A \leq B \Leftrightarrow n(A) \leq n(B)$$

tanımını yapalım. Böylece doğal sayı kümeleri tamsıralanmış olurlar.

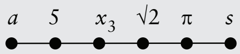
Belki bazı okurlar şu sayılandırmayı daha doğal bulurlar: Eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $i \in \mathbb{N}$ ise

$$A(i) = \begin{cases} 0 & \text{eğer} \quad i \notin A \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer} \quad i \in A \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Şimdi,

$$n(A) = \Sigma_{i=0}^{\infty} A(i)/10^i$$

olsun ve A'ları $n(A)$'lara göre sıralayalım.



Sonlu bir iyisıralama:
$a \prec 5 \prec x_3 \prec \sqrt{2} \prec \pi \prec s$

Atla deve değil belki ama çok çok da kolay olmadı. Aşağıdaki gri karede, doğal sayıları başka türlü tamsıralama yöntemini bulacaksınız.

Doğal sayı kümeleri kümesi $\wp(\mathbb{N})$'yi başarıyla tamsıraladık. Şimdi aynı şeyi $\wp(\mathbb{R})$ için yapmaya çalışın. Zorlanmaktan da öte, başaramayacaksınız.

Eğer bir kümeyi tamsıralamak zorsa, iyisıralamak çok daha zor olmalı.

Sonlu kümeleri iyisıralamakta sorun yaşanmaz elbet. Sayılabilir sonsuzluktaki (yani $\mathbb{N}$ ile aralarında bir eşleme olan) bir kümeyi iyisıralamak da oldukça kolaydır. Gerçekten de, eğer sayılabilir kümeye X dersek ve $f : X \to \mathbb{N}$ bir eşlemeyse, $f(x)$'i x'in numarası olarak algılayıp, X'in elemanlarını numaralarına göre sıralayabiliriz. Yani, X üzerine $\leq$ ilişkisini, her $x, y \in X$ için,

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

olarak tanımlarsak, $\mathbb{N}$'nin iyisıralamasını aynen X'e taşımış oluruz. (Aslında sadece $\mathbb{N}$ ile değil, iyisıralanmış bir kümeyle arasında eşleme bulunan her kümeyi yukardaki yöntemle iyisıralayabiliriz.)

Demek ki iyisıralaması kolay olmayan bir küme sayılamaz sonsuzlukta olmalı. Örneğin $\mathbb{R}$'yi ya da $\wp(\mathbb{N})$'yi çıplak elle iyisıralamak imkânsızdır, Seçim Aksiyomu ya da Zorn Önsavı gibi güçlü silahlar gerekir.

Bu bölümde ZF'yi ve bir de ayrıca Zorn Önsavı'nı kabul edip her kümenin iyisıralanabileceğini kanıtlayacağız.

Bu bölümde ayrıca ZF'yi ve İyisıralama kullanarak Seçim Aksiyomu'nu kanıtlayacağız.

Bir sonraki bölümde de ZFC varsayılarak Zorn Önsavı kanıtlanacak ve böylece ZF aksiyomlar sisteminde Seçim Aksiyomu, Zorn Önsavı ve İyisıralama Teoremi'nin (matematiksel anlamda eşdeğer oldukları gösterilmiş olacak.

Zorn Önsavı $\Rightarrow$ İyisıralama

Teorem 24. 1 [ZF, Zermelo 1904]. *Zorn Önsavı doğruysa her küme iyisıralanabilir.*

Kanıtta ZFC'yi değil sadece ZF'yi kullanacağımızı üstüne basarak tekrar söyleyelim.

Teoremin Kanıtı: A, iyisıralanacak küme olsun. A'nın iyisıralanmış altkümeler kümesine $\mathcal{Z}$ diyelim. Demek ki,

$$\mathcal{Z} = \{(X, \leq) : X \subseteq A \text{ ve } \leq, X\text{'i iyisıralayan ve } X \text{ üzerine tanımlanmış ikili bir ilişkidir}\}.$$

$\mathcal{Z}$'nin elemanlarını iyice anlayalım. $\mathcal{Z}$'de, aynı $X \subseteq A$ için, $(X, \leq)$ ve $(X, \preccurlyeq)$ gibi iki değişik iyisıralama olabilir. (Hatta eğer $|X| > 1$ ise ve X üzerine bir tane iyisıralama varsa mutlaka bir başka iyisıralama daha vardır, örneğin iki elemanın sıralarını değiş tokuş ederek bir başka iyisıralama elde ederiz.)

$\mathcal{Z}$'ye Zorn Önsavı'nı uygulayacağız, ama Zorn Önsavı ancak yarısıralanmış kümelere uygulanabilir. Dolayısıyla önce $\mathcal{Z}$ 'yi yarısıralamalıyız.

$\mathcal{Z}$'**nin yarısıralaması.** $(X, \leq)$ ve $(Y, \preccurlyeq)$, $\mathcal{Z}$'den iki eleman olsun. Eğer $(X, \leq)$ iyisıralaması $(Y, \preccurlyeq)$ iyisıralamasının ***başlangıç dilimi***yse [8.5 Başlangıç Dilimi konusu], yani,

1) $X \subseteq Y$,

2) $x_1, x_2 \in X$ ise, $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow x_1 \preccurlyeq x_2$,

3) $x \in X$, $y \in Y$ ve $y \preccurlyeq x$ ise $y \in X$,

koşulları sağlanıyorsa, o zaman $(X, \leq)$'ye $(Y, \preccurlyeq)$'den küçükeşit diyeceğiz ve bunu $(X, \leq) \sqsubseteq (Y, \preccurlyeq)$ olarak göstereceğiz. $(X, \leq) \sqsubseteq (Y, \preccurlyeq)$ olduğunda, ikinci koşuldan dolayı sıralamaların ikisini de aynı simgeyle (örneğin $\leq$ ile) gösterebiliriz.

$\sqsubseteq$ ilişkisi $\mathcal{Z}$ kümesini yarısıralar. Yani,

$(X, \leq) \sqsubseteq (X, \leq)$,

$(X, \leq) \sqsubseteq (Y, \leq)$ ve $(Y, \leq) \sqsubseteq (X, \leq)$ ise $X = Y$,

$(X, \leq) \sqsubseteq (Y, \leq)$ ve $(Y, \leq) \sqsubseteq (Z, \leq)$ ise $(X, \leq) \sqsubseteq (Z, \leq)$

koşulları doğrudur. Bunların oldukça kolay olan kanıtını okura bırakıyoruz. Şimdi, bu sıralamayla birlikte $\mathcal{Z}$'nin Zorn Önsavı'nın koşullarını sağladığını kanıtlayalım.

Zorn Önsavının Koşulları. Herşeyden önce boşkümenin (boşsıralamasıyla birlikte) $\mathcal{Z}$'de olduğunu görelim, dolayısıya $\mathcal{Z}$ boşküme olamaz. Eğer bu örnek hoşunuza gitmediyse, A'nın boşküme olmadığını varsayıp, bir $a \in A$ için $X = \{a\}$ alın ve X'i olası tek sıralamayla sıralayın.

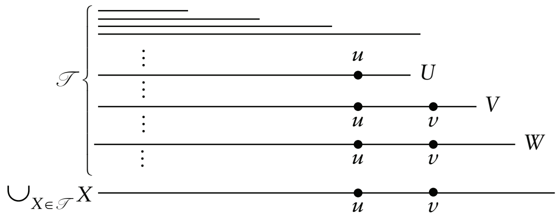
Şimdi $\mathcal{Z}$'den bir $\mathcal{T}$ zinciri alalım. Bu $\mathcal{T}$ zincirinin $\mathcal{Z}$'de bir üstsınırını bulmalıyız. $\mathcal{T}$'deki elemanları $(X, \leq_X)$ olarak yazalım.

$$Y = \bigcup_{(X,\, \leq_X) \in \mathcal{T}} X$$

olsun. Y elbette A'nın bir altkümesi. Şimdi Y'yi birazdan tanımlayacağımız bir $\leq$ ikili ilişkisiyle iyisıralayıp her $(X, \leq_X) \in \mathcal{T}$ için, $(X, \leq_X) \sqsubseteq (Y, \leq)$ önermesini göstereceğiz. Aslında, Y'nin ve $\sqsubseteq$ ilişkisinin tanımından ve (2) özelliğinden dolayı, Y üzerine,

$$X \in \mathcal{T} \text{ için, } (X, \leq_X) \sqsubseteq (Y, \leq)$$

özelliğini sağlayan tek bir sıralama vardır, o da şöyle tanımlanmıştır: Y'den herhangi iki eleman alalım: u ve v. (Aşağıdaki şekilden takip edin.) Y'nin tanımından dolayı, $\mathcal{T}$'nin $(U, \leq_U)$ ve



$(V, \leq_V)$ elemanları için $u \in U$ ve $v \in V$'dir. Ama $\mathcal{T}$ bir zincir olduğundan, ya $U \subseteq V$ ya da $V \subseteq U$. Diyelim birinci ilişki geçerli. O zaman hem u hem de v, V'nin bir elemanıdır. Eğer $u \leq_V v$ ise, Y'de de u'nun v'den küçük olduğuna hükmedelim. Yani

$$u \leq v \Leftrightarrow u \leq_V v$$

olsun. Yalnız bu tanımda bir sorun olabilir: $u \leq v$'nin tanımını yaparken, hem u'yu hem de v'yi içeren bir $V \in \mathcal{T}$ kullandık. $u \le v$ tanımının bu seçimden bağımsız olduğunu göstermemiz gerekir, yoksa tanım kabul edilir bir tanım olmaz. Nitekim, diyelim hem u hem de v aynı zamanda $\mathcal{T}$'nin bir W elemanındalar. (Yukardaki şekilden takip edin.) Ya $W \subseteq V$ ya da $V \subseteq W$ ve (2) özelliğinden dolayı,

$$u \le_V v \Leftrightarrow u \le_W v.$$

Tanımın U'dan bağımsız olduğunu kanıtladık; u ve v'nin her ikisini birden içeren hangi $(U, \le_U) \in \mathcal{T}$ alınırsa alınsın, aynı tanımı elde ediyoruz.

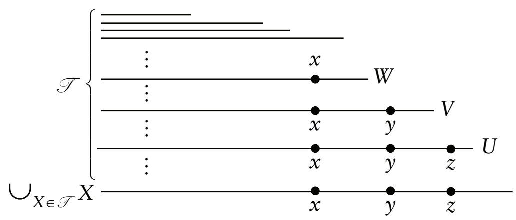
Şimdi bu ilişkinin Y üzerine bir iyisıralama olduğunu kanıtlamamız lazım. Önce yarısıralama olduğunu kanıtlayalım. Bunun için,

1) Her $x \in Y$ için, $x \le x$,

2) Her $x, y \in Y$ için, $x \le y$ ve $y \le x$ ise $x = y$,

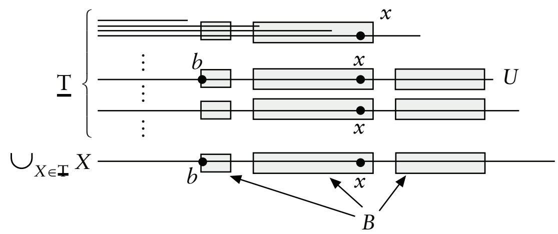
3) Her $x, y, z \in Y$ için, $x \le y$ ve $y \le z$ ise $x \le z$

özelliklerini göstermeliyiz. $\mathcal{T}$ bir zincir olduğundan, eğer Y'nin üç tane x, y ve z elemanı verilmişse, bu elemanların hepsinin birden içinde bulunduğu bir $(U, \le_U) \in \mathcal{T}$ bulabiliriz. O zaman, verilen x, y ve z için yukardaki eşitsizliklerde, $\le$ yerine $\le_U$ alabiliriz. Ama $(U, \le_U)$ bir yarısıralama olduğundan özelliklerin üçü de doğrudur.



Tamsıralama özelliğini (dördüncü özelliği) şimdilik pas geçerek, iyisıralama özelliğini (beşinci özelliği) kanıtlayalım. Bir sonraki şekilden izleyin. B, Y'nin boş olmayan herhangi bir altkümesi olsun. B'nin en küçük elemanını bulmak istiyoruz. $x \in B$

olsun. Demek ki $x \in Y$. Dolayısıyla, belli bir $(U, \leq_U) \in \mathscr{T}$ için $x \in U$ olur. Şimdi $U \cap B$ kümesinin U'nun boş olmayan bir altkümesi olduğunu biliyoruz (x'i içeriyor). $(U, \leq_U)$ bir iyisıralama olduğundan, $U \cap B$ kümesinin $\leq_U$ sıralaması için bir en küçük elemanı vardır. Bu en küçük elemana b diyelim.



Şimdi bu b elemanının B'nin en küçük elemanı olduğunu kanıtlayacağız. $a \in B$, B'nin herhangi bir elemanı olsun. $b \leq a$ eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Hem b'yi hem de a'yı içeren herhangi bir $(V, \leq_V) \in \mathscr{T}$ alalım. $b \leq_V a$ eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Diyelim, $a <_V b$. Eğer $V \subseteq U$ ise $a \in U$ olur. Eğer $U \subseteq V$ ise, o zaman U, V'nin başlangıç dilimidir ve (3)'ten dolayı $a \in U$ olur. Demek ki her iki durumda da $a \in U$. Ama o zaman da a, $U \cap B$ kümesinde, b'den küçük bir eleman olur ki bu da b'nin tanımıyla çelişir. Demek ki $a <_V b$ olamaz, $b \leq_V a$, yani $b \leq a$ olmalı.

Tamsıralama özelliği (dördüncü özellik) beşinci özelliğin bir sonucudur. Nitekim, $x, y \in Y = \bigcup_{X \in \mathscr{T}} X$ ise, $B = \{x, y\}$ alalım. B'nin en küçük elemanı, diğerinden küçükeşittir, yani ya $x \leq y$ ya da $y \leq x$ olur.

Demek ki $Y = \bigcup_{X \in \mathscr{T}} X$ kümesi A'nın iyisıralanmış bir altkümesidir, dolayısıyla $\mathscr{Z}$'dedir.

Daha kanıtımız bitmedi. Her $(X, \leq_X) \in \mathscr{T}$ için,

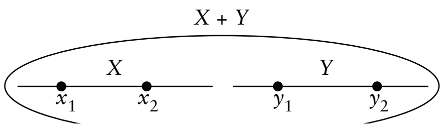
$$(X, \leq_X) \sqsubseteq (Y, \leq)$$

ilişkisini göstermeliyiz, ki $(Y, \leq)$, $\mathscr{T}$'nin üstsınırı olsun. Yani $\mathscr{T}$'nin her $(X, \leq_X)$ elemanının $(Y, \leq)$'nin bir başlangıç dilimi olduğunu göstermeliyiz.

Başlangıç dilimi olmanın birinci özelliği olan $X \subseteq Y$ elbette doğru. İkincisini kanıtlayalım. $x_1, x_2 \in X$ ise "$x_1 \leq_X x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$" önermesini kanıtlamalıyız. Ama bu, Y üzerine tanımladığımız $\leq$ sıralamanın bir özelliği.

Son özelliğe gelelim. $x \in X$, $y \in Y$ ve $y \leq x$ olsun. y'nin X'in bir elemanı olduğunu göstermeliyiz. Hem x hem de y'yi eleman olarak içeren bir $(U, \leq_U) \in \mathcal{T}$ vardır. Y üzerine koyduğumuz $\leq$ ilişkisinin tanımından dolayı, $y \leq_U x$ ilişkisi elbette doğrudur. Eğer $X \subseteq U$ ise, X, U'nun bir başlangıç dilimidir ve bu yüzden $y \in X$ olur. Eğer $U \subseteq X$ ise, elbette $y \in X$ olur. Demek ki her iki durumda da $y \in X$.

Zorn Önsavı'nı Kullanıyoruz. Demek ki, Zorn Önsavı'na göre, $\mathcal{Z}$'nin maksimal bir elemanı var. Bu elemana $(Y, \leq)$ diyelim. Y'nin A olduğunu kanıtlayacağız. Eğer $Y \subset A$ olsaydı, o zaman bir $a \in A \setminus Y$ olurdu. Şimdi $Y_1 = Y \cup \{a\}$ olsun. Y_1'i iyisıralayalım. Bunun için, Y'nin sıralamasını alıp, a elemanını



Y_1'in en sonuna koyalım, yani a, Y'nin bütün elemanlarından daha büyük olsun. Bu yeni sıralamaya $(Y_1, \leq)$ diyelim. $(Y_1, \leq)$ iyisıralı bir kümedir, yani $(Y_1, \leq) \in \mathcal{Z}$ olur. Ayrıca kolaylıkla görüleceği üzere, $(Y, \leq) \sqsubseteq (Y_1, \leq)$ olur, yani Y, Y_1'in başlangıç dilimidir. Ama hani $(Y, \leq)$, $\mathcal{Z}$'nin maksimal elemanıydı? Oysa $\mathcal{Z}$'de $(Y, \leq)$'den daha büyük bir eleman bulduk. Bir çelişki. Demek ki $Y = A$ ve A kümesi $\leq$ tarafından iyisıralanmıştır. □

İyisıralama $\Rightarrow$ Seçim Aksiyomu

Bölüm 18, Örnek 1'de $\mathbb{N}$'nin boş olmayan altkümeleri kümesi $\wp(\mathbb{N})^*$'nin bir seçim fonksiyonunu bulduk. Okur anımsasın: $\mathbb{N}$'nin boş olmayan her A altkümesinden A'da bulunan en küçük doğal sayıyı seçtik. Görüldüğü gibi burada önemli olan, $\mathbb{N}$'den ziyade $\mathbb{N}$'nin iyisıralanmış olması. $\mathbb{N}$ yerine iyisıralanmış hangi X kümesini alırsak alalım, aynı yöntemle, $\wp(X)^*$'in bir seçim fonksiyonunu buluruz: X'in boş olmayan her altkümesinden, altkümenin en küçük elemanını seçelim. Bir önceki teoremden, her kümenin iyisıralanacağını bildiğimizden, bu fikri kullanabiliriz.

Aşağıdaki teoremde (aynen yukardakinde olduğu gibi) sadece ZF'yi kullanacağız.

Teorem 24.2 [ZF]. *İyisıralama Teoremi doğruysa, Seçim Aksiyomu da doğrudur.*

Kanıt: X, hiçbir elemanı $\emptyset$ olmayan bir küme olsun. $A = \cup X = \cup_{Y \in X} Y$ olsun. A, X'in elemanlarının elemanlarından oluşur ve böylece X'in her elemanı A'nın bir altkümesi olur. Varsayıma göre A'yı iyisıralayabiliriz. İyisıralayalım. Şimdi eğer $Y \in X$ ise, Y, A'nın boş olmayan bir altkümesi olduğundan, Y'nin en küçük elemanı vardır. Y'den işte bu en küçük elemanı seçelim. Yani $f(Y) = Y$'nin en küçük elemanı olsun. Böylece $f(Y) \in Y$ olur ve f bir seçim fonksiyonudur.

İyisıralanabilirlik Teoremi'nin Kısa Tarihi

1878'de Cantor ***Süreklilik Varsayımı***'nı ortaya attı:

Süreklilik Varsayımı. $\mathbb{R}$*'nin her sonsuz altkümesi ya doğal sayılar kümesiyle ya da* $\mathbb{R}$*'nin kendisiyle eşlendirilebilir. Daha modern bir söylemle,* $|\mathbb{N}| = \omega = \aleph_0$ *ile* $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ *arasında bir başka kardinalite yoktur.*

Çok denemesine karşın Cantor bu varsayımını kanıtlayamadı. Çağının en önemli matematikçisi Hilbert, Cantor'un bu varsayımının önemini hemen kavradı ve 1900'de Paris'te verdiği ünlü konuşmasında, Cantor'un bu sorusunu dinleyicilere (ve 20'nci yüzyıl matematikçilerine) ilk soru olarak sundu. Hilbert, Süreklilik Önsavı'ndan önce her kümenin iyisıralanabileceğinin kanıtlanması gerektiğini önerdi.


Zermelo (1871-1953)

O sırada Hilbert'le aynı üniversitede (Göttingen'de) bulunan Zermelo, 1904'te Hilbert'in önerdiği sonucu (İyisıralanabilirlik Teoremi) kanıtladı. Zermelo bu kanıtıyla Göttingen'de profesör oldu ve ün kazandı. (Daha o zamanlar Zorn Önsavı bilinmiyordu, dolayısıyla Zermelo'nun kanıtı burada verdiğimiz kanıt olamaz. Burada verdiğimiz kanıt, profesörlük unvanını kazanmak için biraz fazla kolay!)

Zermelo'nun kanıtı Seçim Aksiyomu'nu kullanıyordu. O zamanlar, Russell Paradoksu daha yeni yeni bulunmuştu ve Kümeler Kuramı büyük bir kriz yaşıyordu. Bu tür kanıtları birçok matematikçi kuşkuyla karşılıyordu. Kanıtı o kadar çok eleştiri aldı ki, 1908'de aynı sonucun daha kabul edilir bir kanıtını verdi. Kanıtı gene Seçim Aksiyomu'nu kullanıyordu elbet ama bu sefer kanıtını matematikçilerin daha alışık oldukları bir kılıfa sokmuştu. Bu makalesinde ayrıca, hem Seçim Aksiyomu'nu kullanımını savundu hem de diğer matematikçilerin de (özellikle analizcilerin) farkına varmadan Seçim Aksiyomu'nu kullandıklarını gösterdi.