25. Hausdorff Zincir Teoremi ve Zorn Önsavı'nın Kanıtı

Tolga Karayayla

Geçen bölümde, Zorn Önsavı varsayılarak İyisıralama Teoremi ve İyisıralama Teoremi varsayılarak Seçim Aksiyomu kanıtlandı. Bu bölümde önce Seçim Aksiyomu'nu varsayarak Hausdorff Zincir Teoremi'ni, ardından Hausdorff Zincir Teoremi'ni varsayarak Zorn Önsavı'nı kanıtlayacağız. Böylece bu dört önermenin (Zorn Önsavı, İyi Sıralama Teoremi, Seçim Aksiyomu ve Hausdorff Zincir Teoremi'nin) ZF altında denk olduğu sonucuna ulaşılacak.

25.1. Hausdorff Zincir Teoremi

Kanıtlayacağımız teoremi yazalım önce. Kullandığımız terimleri hemen sonra açıklayacağız.

Hausdorff Zincir Teoremi 25. 1 [ZFC]. *Yarısıralanmış her kümede maksimal bir zincir vardır.*

Yarısıralı bir kümenin tamsıralanmış bir altkümesine ***zincir*** adı verilir. Örneğin,

$$\emptyset \subset \{0, 2\} \subset \{0, 2, 4, 6\} \subset \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$
$$\subset \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \subset \ldots$$

daha doğrusu, $\mathbb{N}$'nin altkümeleri kümesi $\wp(\mathbb{N})$'nin

$$\{\varnothing, \{0, 2\}, \{0, 2, 4, 6\},$$
$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10\},$$
$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}, \ldots\}$$

altkümesi, $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ yarısıralamasının bir zinciridir; ama maksimal değildir, çünkü, $\varnothing$ ile $\{0, 2\}$ arasına $\{0\}$ kümesini ekleyerek daha büyük bir zincir elde edebiliriz.

$$\varnothing \subset \{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\} \subset \{0, 1, 2, 3\} \subset \ldots$$

zinciri de $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ yarısıralamasının maksimal bir zinciri değildir, çünkü bu zincirin "en sonuna" $\mathbb{N}$'yi ekleyerek zinciri büyütebiliriz; bu zincire ancak $\mathbb{N}$'yi de eklersek $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ yarısıralamasının maksimal bir zincirini bulabiliriz.

$$\varnothing \subset \{0\} \subset \{0, 2\} \subset \{0, 2, 4\} \subset \{0, 2, 4, 6\} \subset \ldots$$

zincirine $\mathbb{N}$'yi de eklesek $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ yarısıralamasının maksimal bir zincirini elde etmeyiz; ama

$$2\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N} \cup \{1\} \subset 2\mathbb{N} \cup \{1, 3\} \subset \ldots.$$

zincirini de eklersek maksimal bir zincir elde ederiz.

Eğer $\wp^{<\omega}(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}$'nin sonlu altkümeleri kümesini simgeliyorsa, yukardaki

$$\varnothing \subset \{0\} \subset \{0, 2\} \subset \{0, 2, 4\} \subset \{0, 2, 4, 6\} \subset \ldots$$

zinciri $(\wp^{<\omega}(\mathbb{N}), \subseteq)$ yarısıralamasının maksimal bir zinciridir. Asal sayılarla belirlenmiş,

$$\varnothing \subset \{2\} \subset \{2, 3\} \subset \{2, 3, 5\} \subset \{2, 3, 5, 7\} \subset \ldots$$

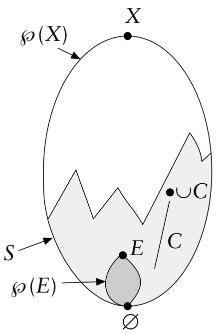
zinciri de $(\wp^{<\omega}(\mathbb{N}), \subseteq)$ yarısıralamasının maksimal bir zinciridir.

Daha matematiksel tanımlar şöyle: $(\mathcal{Z}, \leq)$ yarısıralı bir küme ve $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z}$ olsun. Eğer $\mathcal{X}$'in her x ve y elemanı için, $x \leq y$ ve $y \leq x$ eşitsizliklerinden biri doğruysa, $\mathcal{X}$'e ***zincir*** denir. $\mathcal{Z}$'nin zincirlerinden oluşan küme, altküme olma ilişkisi altında yarısıralanmıştır. Bu yarısıralamanın maksimal elemanlarına ***maksimal zincir*** adı verilir. Yani eğer $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$'nin bir zinciriyse ve $\mathcal{X}$'i özaltküme olarak içeren $\mathcal{Z}$'nin bir başka zinciri yoksa, $\mathcal{X}$'e $\mathcal{Z}$'nin maksimal zinciri denir.

Bir $\mathcal{X}$ zincirinin $\mathcal{Z}$ yarısıralı kümesinin maksimal bir zinciri olması için, her $a \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{X}$ için, $\mathcal{X} \cup \{a\}$'nın bir zincir olmaması gerek ve yeter koşuldur.

Bu bölümde Seçim Aksiyomu'nu kabul edip Hausdorff Zincir Teoremi'ni elde edeceğiz. Kanıta şu oldukça zorlu önsavla başlayalım (işin neredeyse tamamını bu önsav yapacak).

Önsav 25.2 **(ZFC).** *X bir küme ve $\mathcal{S}$, $\wp(X)$'in şu özellikleri sağlayan bir altkümesi olsun*:
i. $\emptyset \in \mathcal{S}$,
ii. *$F \subseteq E \in \mathcal{S}$ ise $F \in \mathcal{S}$*,
iii. *$\mathcal{S}$'nin her $\mathcal{C}$ zinciri için*, $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{S}$.
O zaman $\mathcal{S}$'de maksimal bir küme vardır. Yani $\mathcal{S}$'de öyle bir M vardır ki, eğer $M \subseteq N \in \mathcal{S}$ ise $M = N$'dir.



Hausdorff Zincir Teoremi'ni elde etmek için, bu önsavda, $\mathcal{S}$'yi yarısıralanmış kümenin zincirlerinden oluşan küme olarak alacağız.

Önsavın Kanıtı: Seçim Aksiyomu'nu (C) kabul ettiğimize göre, $\wp(X)^*$'ın bir seçim fonksiyonu vardır.

$$s : \wp(X)^* \to X$$

bir seçim fonksiyonu olsun. Demek ki, X'in boş olmayan her E altkümesi için

$$s(E) \in E.$$

Şimdi,

$$g : \mathcal{S} \to \wp(X)$$

fonksiyonunu şöyle tanımlayalım: Her $E \in \mathcal{S}$ için

$$g(E) = \{x \in X : E \cup \{x\} \in \mathcal{S}\}.$$

Sav 1. *Her* $E \in \mathcal{S}$ *için*, $E \subseteq g(E)$.

Kanıt: Eğer $x \in E$ ise,

$$E \cup \{x\} = E \in \mathcal{S}.$$

Dolayısıyla $x \in g(E)$. □

Sav 2. $g(E) = E$ *eşitliği sadece ve sadece* $\mathcal{S}$*'nin maksimal* E *elemanları tarafından sağlanır. maksimal olmayan bir* $E \in \mathcal{S}$ *için*, $E \subset g(E)$*'dir*.

Kanıt: $E \in \mathcal{S}$ maksimal olsun. Eğer $g(E) \neq E$ ise o zaman $g(E)$'de olan ama E'de olmayan bir $x \in X$ bulunur; bu durumda, $E \subset E \cup \{x\} \in \mathcal{S}$ olduğundan E'nin maksimallığıyla çelişiriz.

Şimdi $g(E) = E$ olsun. Eğer E maksimal değilse $E \subset G \in \mathcal{S}$ olacak şekilde bir G bulunur. $x \in G \setminus E$ olsun. Demek ki

$$E \cup \{x\} \subseteq G \in \mathcal{S}.$$

Dolayısıyla $\mathcal{S}$'nin (ii) özelliğine göre, $E \cup \{x\} \in \mathcal{S}$ ve $x \in g(E)$. Ama x, $G \setminus E$'nin bir elemanı olduğundan, E'nin bir elemanı değildir. Demek ki $E \subset g(E)$ olur ve bu da $g(E) = E$ varsayımına ters düşer. □

Şimdi $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ fonksiyonunu

$$f(E) = \begin{cases} E & \text{eğer } g(E) = E \text{ ise} \\ E \cup \{s(g(E)/E)\} & \text{eğer } g(E) \neq E \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

f fonksiyonu gerçekten de $\mathcal{S}$'de değer alır: Eğer $g(E) = E \in \mathcal{S}$ ise, $f(E) = E \in \mathcal{S}$. Eğer $g(E) \neq E \in \mathcal{S}$ ise, $E \subset g(E)$ olduğu için, $g(E) \setminus E \neq \varnothing$ ve $s(g(E) \setminus E) \in g(E)$. Bu yüzden

$$f(E) = E \cup \{s(g(E) \setminus E)\} \in \mathcal{S}$$

olur.

Kolayca görüldüğü gibi her $E \in \mathcal{S}$ için

$$E \subseteq f(E) \text{ ve } |f(E) \setminus E| \leq 1$$

olur. (Dikkat! Bu son özellik kanıtın sonunda bitirici rol oynayacak).

Sav 3. *$f(E) = E$ ancak ve ancak $g(E) = E$ ise.*

Kanıt: Eğer $g(E) = E$ ise, f'nin tanımından dolayı $f(E) = E$. Öte yandan, eğer $f(E) = E$ ama $g(E) \neq E$ ise, o zaman

$$E = f(E) = E \cup \{s(g(E) \setminus E)\}$$

ve $s(g(E) \setminus E) \in E$; oysa $s(g(E) \setminus E)$, $g(E) \setminus E$'de olduğundan E'de olamaz. □

Sav 4. *$\mathcal{S}$'nin bir E elemanının maksimal olması için $f(E) = E$ eşitliği gerek ve yeter koşuldur.*

Kanıt: Sav 2'ye göre, $g(E) = E$ eşitliği, E'nin maksimal olması için gerek ve yeter koşuldur. Sav 3'e göre, $f(E) = E$ eşitliği, $g(E) = E$ eşitliği için gerek ve yeter koşuldur. □

Eğer $\mathcal{S}$'nin bir $\mathcal{T}$ altkümesi,

1) $\emptyset \in \mathcal{T}$,

2) $E \in \mathcal{T}$ ise $f(E) \in \mathcal{T}$,

3) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ bir zincir ise, $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{T}$

koşullarını sağlıyorsa, $\mathcal{T}$'ye ***kule*** diyelim.

Dikkat ederseniz $\mathcal{S}$'nin kendisi de bir kuledir. Ayrıca, bir kule ailesinin kesişimin de kule olduğunu kanıtlamak çok kolay. Dolayısıyla tüm kulelerin kesişimi de bir kuledir ve en küçük kuledir.

Sav 5. *Eğer $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ hem bir kule hem de bir zincirse, $\cup\mathcal{M}$, $\mathcal{S}$'nin maksimal bir elemanıdır.*

Kanıt: $\mathscr{M}$, hem zincir hem de kule olsun. (3)'e göre ($\mathscr{C} = \mathscr{T} = \mathscr{M}$ alın), $\cup\mathscr{M} \in \mathscr{M}$. (2)'ye göre de $f(\cup\mathscr{M}) \in \mathscr{M}$; dolayısıyla $f(\cup\mathscr{M}) \subseteq \cup\mathscr{M}$. Öte yandan $\cup\mathscr{M} \subseteq f(\cup\mathscr{M})$ olduğunu biliyoruz. Böylece $f(\cup\mathscr{M}) = \cup\mathscr{M}$ elde ederiz. Sav 4'e göre, $\cup\mathscr{M}$ maksimaldır. □

Demek ki $\mathscr{S}$'nin hem kule hem de zincir olan bir altkümesini bulmalıyız.

Sav 6. *Tüm kulelerinin kesişimi, yani $\mathscr{S}$'nin*

$$\mathscr{M} := \bigcap \{\mathscr{T} : \mathscr{T} \text{ bir kule}\}$$

altkümesi hem bir kule hem de $\mathscr{S}$'nin bir zinciridir.

Kanıt: $\mathscr{S}$'nin kulelerinin kesişimine $\mathscr{M}$ diyelim. $\mathscr{M}$, kulelerin kesişimi olduğundan, bir kuledir. $\mathscr{M}$'nin zincir olduğunu göstermek için yeni bir küme tanımlıyoruz:

$$\mathscr{Z} = \{E \in \mathscr{S} : \text{her } x \in \mathscr{M} \text{ için ya } x \subseteq E \text{ ya da } E \subseteq x\}$$

olsun.

Eğer $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{Z}$ ise, $\mathscr{M}$ bir zincirdir: $E, F \in \mathscr{M}$ ise, o zaman $E \in \mathscr{Z}$'dir; şimdi tanımdaki x'i F alalım. Demek ki $\mathscr{M}$'nin $\mathscr{Z}$'nin altkümesi olduğunu göstermeliyiz; bunun için de $\mathscr{Z}$'nin kule olduğunu göstermek yeter çünkü $\mathscr{M}$ tüm kulelerin kesişimi. Demek ki aşağıdaki sav önsavımızın kanıtını bitirir.

Sav 7. *$\mathscr{Z}$ bir kuledir.*

Kanıt: Kulenin tanımındaki koşulları teker teker gözden geçirelim. Elbette $\varnothing \in \mathscr{Z}$, yani $\mathscr{Z}$, kule olmanın ilk koşulunu sağlar. $\mathscr{Z}$'nin (3) koşulunu sağladığını söylemek için $\mathscr{Z}$'de bir $\mathscr{C}$ zinciri alalım ve $\cup\mathscr{C} \in \mathscr{Z}$ önermesini kanıtlayalım. Yani

a) $\cup\mathscr{C} \in \mathscr{S}$,

b) her $x \in \mathscr{M}$ için, ya $x \subseteq \cup\mathscr{C}$ ya da $\cup\mathscr{C} \subseteq x$

koşullarını kanıtlamalıyız.

$\mathscr{C}$, $\mathscr{S}$'nin bir altkümesi olduğundan, $\mathscr{C}$, $\mathscr{S}$'de de bir zincirdir, dolayısıyla (iii)'ten dolayı $\cup\mathscr{C} \in \mathscr{S}$ olur. Demek ki (a) kanıtlandı.

(b)'yi kanıtlamak için, herhangi bir $x \in \mathscr{M}$ alıp x'in $\cup\mathscr{C}$'nin altkümesi olmadığını varsayalım. $\cup\mathscr{C}$'nin x'in bir altkümesi olduğunu kanıtlamalıyız. $y \in C$ olsun. x, $\cup\mathscr{C}$'nin altkümesi olmadığına göre, x, y'nin de altkümesi olamaz. y, $\mathscr{Z}$'nin elemanı olduğundan, $\mathscr{Z}$'nin tanımından $y \subset x$ çıkar. Bu her $y \in \mathscr{C}$ için doğru. Böylece $\cup\mathscr{C} \subset x$ bulunur ve $\mathscr{Z}$'nin (3)'ü sağladığı kanıtlanmış olur.

Son olarak $\mathscr{Z}$'nin (2)'yi sağladığını göstermeliyiz. Bunun için $\mathscr{Z}$'den bir E elemanı alalım. $f(E) \in \mathscr{Z}$ önermesini kanıtlamalıyız. $\mathscr{M}$'den herhangi bir x elemanı alıp, $f(E) \subseteq x$ ve $x \subseteq f(E)$ önermelerinden birinin doğru olduğunu kanıtlamalıyız.

$$\mathscr{T} = \{x \in \mathscr{M} : \text{ya } f(E) \subseteq x \text{ ya da } x \subseteq E\}$$

olsun. Demek ki $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{T}$ olduğunu göstermek yeterli (çünkü $E \subseteq f(E)$).

$\mathscr{T}$'nin bir kule olduğunu kanıtlamak işi bitirir, çünkü $\mathscr{M}$ tüm kulelerin kesişimi. Demek ki aşağıdaki sav önsavımızın kanıtını bitirir. (Aşağıdaki kanıtta $\mathscr{T}$'nin tanımındaki E'nin $\mathscr{Z}$'nin sabit bir elemanı olduğunu unutmayın.)

Sav 8. *$\mathscr{T}$ bir kuledir.*

Kanıt: Boşküme $\mathscr{T}$'de elbette, (1) tamam.

(3)'ü kanıtlayalım. $\mathscr{C}$, $\mathscr{T}$'de bir zincir olsun. $f(E) \subseteq \cup\mathscr{C}$ ve $\cup\mathscr{C} \subseteq E$ önermelerinden birini kanıtlamalıyız.

$\mathscr{T}$, $\mathscr{M}$'nin bir altkümesi olduğundan, $\mathscr{C}$, $\mathscr{M}$'nin de bir zinciridir. Demek ki $\cup\mathscr{C} \in \mathscr{M}$ çünkü $\mathscr{M}$ bir kule, bunu biliyoruz (bkz. Sav 6).

Eğer $f(E)$, $\cup\mathscr{C}$'nin altkümesi değilse, $f(E)$, $\mathscr{C}$'nin hiçbir elemanının altkümesi olamaz. Öyleyse, $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{T}$ olduğundan, $\mathscr{C}$'nin her elemanı E'nin altkümesidir. Sonuç olarak $\cup\mathscr{C} \subseteq E$ ve $\mathscr{T}$, (3)'ü sağlıyor.

Son adımda $\mathscr{T}$'nin (2)'yi sağladığını göstereceğiz, yani eğer x, $\mathscr{T}$'nin bir elemanıysa, $f(x)$'in de $\mathscr{T}$'nin bir elemanı olduğunu göstereceğiz. Böyle bir x alalım. Demek ki,

"$f(x) \in \mathscr{M}$" ve "ya $f(E) \subseteq f(x)$ ya da $f(x) \subseteq E$"
koşullarını göstermeliyiz.

$x \in \mathscr{T}$ olduğundan, x, $\mathscr{M}$'nin de bir elemanıdır. $\mathscr{M}$ bir kule olduğundan, $f(x) \in \mathscr{M}$. Birinci koşulu gösterdik. Sıra,

$$f(E) \subseteq f(x) \text{ ya da } f(x) \subseteq E$$

koşullarından birinin doğru olduğunu göstermeye geldi. $x \in \mathscr{T}$ olduğundan,

$$\text{ya } f(E) \subseteq x \text{ ya da } x \subseteq E.$$

Üç değişik şıkkı incelemeliyiz:

Şık 1. $f(E) \subseteq x$. Bu durumda $f(E) \subseteq x \subseteq f(x)$.

Şık 2. $E = x$. Bu durumda $f(E) \subseteq f(x)$ elbette.

Şık 3. $x \subset E$. Şimdi bu son durumu irdeleyelim. $f(x) \in \mathscr{M}$ ve $E \in \mathscr{Z}$ olduğundan, $\mathscr{Z}$'nin tanımına göre

$$\text{ya } f(x) \subseteq E \text{ ya da } E \subset f(x).$$

Eğer $E \subset f(x)$ olursa $x \subset E \subset f(x)$ olur, fakat bu bir çelişki çünkü $|f(x) \setminus x| \leq 1$ olmalıydı. Demek ki $f(x) \subseteq E$. □

Hausdorff Zincir Teoremi 25.3 [ZFC]. *Her yarısıralı kümenin maksimal bir zinciri vardır.*

Kanıt: X, yarısıralı küme olsun. Eğer $X = \emptyset$ ise $\emptyset$ maksimal bir zincirdir. Bundan böyle $X \neq \emptyset$ varsayımını yapalım.

$$\mathscr{S} = \{\mathscr{C} : \mathscr{C}, X\text{'te bir zincir}\}$$

olsun. Seçim Aksiyomu kabul edildiğine göre yukarıda kanıtladığımız önsavı kullanmanın hiçbir sakıncası yok. Tek yapmamız gereken kanıtladığımız önsavın koşullarını kontrol etmek. Teoremimiz, önsavımızın özel bir durumu olacak.

(i) $\emptyset$ bir zincirdir, dolayısıyla $\emptyset \in \mathscr{S}$.

(ii) E zincirse ve $F \subseteq E$ ise F de bir zincirdir elbette. Demek ki $F \in \mathscr{S}$.

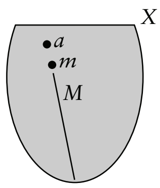
(iii) $\mathscr{C}$, $\mathscr{S}$'de bir zincir olsun. ($\mathscr{C}$, bir zincirler zinciridir.) $\cup\mathscr{C}$'nin X'te bir zincir olduğunu gösterelim. $x, y \in \cup\mathscr{C}$ olsun. $x \in A$ ve $y \in B$ olacak şekilde $A, B \in \mathscr{C}$ zincirleri vardır. $\mathscr{C}$ zincir olduğundan ya $A \subseteq B$ ya da $B \subseteq A$. Genelliği kaybetmeden

$A \subseteq B$ kabul edebiliriz. Bu durumda $x \in B$ olur ve B, X'te bir zincir olduğundan x ya da y'den biri diğerinden küçükeşittir. Bu da E'nin X'te bir zincir olduğunu kanıtlar: $E \in \mathscr{S}$. □

Seçim Aksiyomu'nu kabul edip önsavı, onu kullanarak da Hausdorff Zincir Teoremi'ni kanıtladık. Şimdi son teoremi kullanarak Zorn Önsavı'nı kanıtlayalım.

Teorem 25.4 [Zorn Önsavı , ZFC]. X, *boş olmayan yarısıralı bir küme olsun. X'in her zincirinin X'te bir üstsınırı varsa, X'in maksimal bir elemanı vardır.*

Kanıt: Seçim Aksiyomu'nu kabul ettiğimizden, sonucu olan Hausdorff Zincir Teoremi'ni kullanarak X'te maksimal bir zincirin varlığını söyleyebiliriz. $\mathscr{M}$, böyle bir zincir olsun. Varsayımımıza göre X'te $\mathscr{M}$'nin üstsınırı olan bir m elemanı vardır. m'nin X'in maksimal bir elemanı olduğunu gösterelim. $a \in X$, $a > m$ olsun. m, $\mathscr{M}$'nin üstsınırı olduğundan $a \notin \mathscr{M}$ ve $\mathscr{M} \subset \mathscr{M} \cup \{a\}$. Okur kolaylıkla $\mathscr{M} \cup \{a\}$'nın bir zincir olduğunu kanıtlayabilir ve bu da $\mathscr{M}$'nin maksimalluğuyla çelişir. Demek ki m, X'in maksimal bir elemanıdır. □



Yukarıdaki son teoremi aslında sadece Hausdorff Zincir Teoremi'ni kabul ederek kanıtladık. Son olarak gönül rahatlığıyla şöyle özetleyebiliriz: Seçim Aksiyomu Hausdorff Zincir Teoremi'ni o da Zorn Önsavı'nı gerektirir. Daha önceki bölümün sonuçlarıyla birlikte, tüm bu önermelerin birbirine denk olduklarını söyleyebiliriz.

Kaynakça

M. Eisenberg, **Axiomatic Theory of Sets and Classes**, 1971, Holt, Rinehart and Winston, Inc. (sayfa 259-265).

25.2. Basit Sonuçlar

Teorem 25.5 [ZFC]. *Her küme en az bir ordinale eşleniktir.*

Kanıt: Teorem 25.4'e göre Zorn Önsavı doğrudur. Teorem 24.1'e göre her küme iyisıralanabilir. Teorem 12.1'e göre her iyisıralı küme bir ve bir tek ordinalle eşyapısaldır. Demek ki her küme en az bir ordinale eşleniktir. □

Sonuç 25.6. [ZFC] *Sonsuz bir kümenin sayılabilir sonsuzlukta bir altkümesi vardır.*

Kanıt: X sonsuz bir küme olsun. Teorem 25.5'e göre X bir α ordinaliyle eşleniktir. $f : \alpha \to X$ bir eşleme olsun. Teorem 10.9 ve Ord1'e göre ya $\omega \subseteq \alpha$ ya da $\alpha \in \omega$. Ama X sonsuz olduğu ikinci şık olamaz, dolayısıyla $\omega \subseteq \alpha$. Şimdi $f(\omega)$, X'in sayılabilir sonsuzlukta bir altkümesidir. □

25.3. Seçim Aksiyomu'na Denk Üç Sonuç

1. Aşağıdaki önermenin Seçim Aksiyomu'na eşdeğer olduğu çok bariz:

Teorem 25.6. $(X_i)_{i\in I}$, *hiçbiri boş olmayan bir küme ailesiyse,* $\Pi_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.

2. X bir küme ve $\Im \subseteq \wp(X)$ olsun. Eğer $\Im$ şu iki özelliği sağlıyorsa:

1) Eğer $A \in \Im$ ise, A'nın her sonlu altkümesi $\Im$'dedir.
2) Eğer X'in bir A altkümesinin her sonlu alkümesi $\Im$'deyse A da $\Im$'dedir,

o zaman $\Im$'ye ***sonlu karakterli*** denir.

Tukey Önsavı 25.7. *Sonlu karakterli ve boş olmayan her kümenin* (altküme olma ilişkisine göre) *maksimal bir elemanı vardır.*

3. Her ne kadar Hausdorff Zincir Teoremi'nden daha güçlü gibi görünse de aşağıdaki Önsav da Seçim Aksiyomu'na denktir.

Kuratowski Önsavı 25.8. *Yarısıralı her kümede her zincir maksimal bir zincirin içindedir.*