32. Kardinal Sayıları, Tanım ve İlk Özellikler

Her kümenin iyisıralanabileceğini kanıtlamıştık (Teorem 24.1).

Özel iyisıralı kümeler olan ordinalleri de Bölüm 10'da tanımlamıştık. Ordinallerde iyisıralama $\alpha \in \beta$ ilişkisiyle verilir, yani bir ordinalde < sıralaması,

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$$

olarak tanımlanır. Ordinalin elemanları da ordinaldirler (Teorem 10.6).

Her iyisıralı kümenin bir ordinale eşyapısal olduğunu Bölüm 12'de kanıtlamıştık.

Demek ki her küme en az bir ordinale eşleniktir, yani eğer X bir kümeyse X'le arasında bir eşleme olan en az bir ordinal vardır. X'le arasında bir eşleme bulunan ordinallerden birine α dersek,

$$\{\beta \le \alpha : X\text{'le } \beta \text{ arasında bir eşleme var, yani } X \approx \beta\}$$

kümesi, α ordinalinin boş olmayan bir altkümesidir. Demek ki en küçük bir elemanı vardır. Bu ordinali $|X|$ olarak gösterelim.

Eğer β ve γ iki ordinalse, ya $\beta < \gamma$, ya $\gamma < \beta$ ya da $\beta = \gamma$'dır (Teorem 10.9). Dolayısıyla yukarda tanımlanan $|X|$, seçilen α'dan bağımsızdır ve sadece X'e göre değişir. Demek ki $|X|$, X'le arasında bir eşleme bulunan en küçük ordinaldir.

X kümesiyle arasında eşleme bulunan bu en küçük $|X|$ ordinaline X'in ***kardinali***, ***kardinal sayısı***, ***kardinalitesi*** ya da ***eleman sayısı*** denir.

$|X|$'le $|X|$'ten daha küçük bir ordinal arasında bir eşleme olamaz elbette. (Yoksa X'le bu daha küçük ordinal arasında bir eşleme olurdu.) Bir ***kardinal sayıyı***, kendisinden daha küçük bir ordinalle arasında eşleme olmayan ordinal olarak tanımlayalım. Her X kümesi için, $|X|$ bir kardinal sayıdır.

Her kardinal sayısının kardinali kendisine eşittir elbette, yani $||X|| = |X|$.

Kardinaller özel ordinaller olduklarından, ordinallerin sıralamasıyla sıralanırlar.

Alıştırma. $|X| = \bigcap \{\alpha : \alpha \text{ ordinal ve } X \approx \alpha\}$ eşitliğini kanıtlayın.

İlk kardinal sayılarımızı bulalım:

Teorem 32.1. *Her doğal sayı bir kardinal sayısıdır.*

Kanıt: Bir n doğal sayısıyla kendisinden küçük bir m doğal sayısı arasında bir eşleme olamayacağını kanıtlamalıyız. Bu çok bariz önermeyi kanıtlayabilmek için doğal sayının tanımınabaşvurmamız gerekir elbet. Bu tanımı [Sİ]'de vermiştik. O ders notlarında doğal sayıları teker teker değil, topunu birden, yani doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi tanımlamıştık. Ardından, doğal sayıları $\mathbb{N}$'nin elemanları olarak tanımlamıştık. Okurun tanımı bildiğini varsayıyoruz. Ancak

$$0 = \emptyset \text{ ve } n + 1 = n \cup \{n\}$$

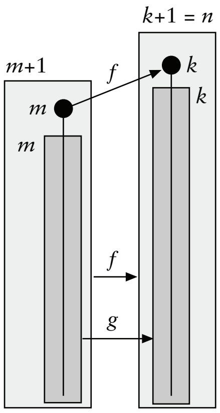
tanımlarını ve her n doğal sayısının kendisinden küçük elemanlar kümesi olduğunu anımsatalım.

"Her n ve m doğal sayısı için, $m < n$ ise, n ile m arasında bir eşleme yoktur" önermesini m üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız.

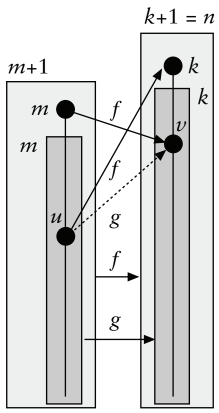
Eğer $m = 0 = \varnothing$ ise, m'den n'ye giden bir fonksiyonun imgesi ancak $\varnothing$ olabilir, dolayısıyla $n \neq 0 = \varnothing$ olduğundan, böyle bir fonksiyon örten olamaz.

Önermenin m için doğru olduğunu varsayıp önermeyi $m + 1$ için kanıtlayalım. $m + 1 < n$ olsun ve $m + 1$'den n'ye giden bir f eşlemesi olduğunu varsayalım. Bir çelişki elde edeceğiz. n, 0'dan büyük olmak zorunda olduğundan, bir k doğal sayısı için, $n = k + 1$ olmalı. $u < m + 1$ ve $v < n$ sayılarını $f(u) = k$ ve $f(m) = v$ eşitlikleriyle tanımlayalım.

Aşağıda resimlediğimiz iki değişik şık var.



Birinci Şık: $f(m) = k$.



İkinci Şık: $f(m) \neq k$.

Birinci Şık: $u = m$ ise. Bu durumda, f, m'den k'ye giden bir g eşlemesine yol açar: $g = f_{|m}$. Ama tümevarım varsayımı bunu yasaklar.

İkinci Şık: $u \neq m$ ise. Bu durumda, $g : m \to k$ fonksiyonunu,

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & \text{eğer } i \neq u \text{ ise} \\ v & \text{eğer } i = u \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu da m ile k arasında bir eşlemedir ve bize gereken çelişkidir. □

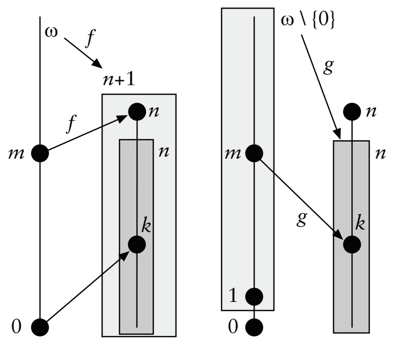
Şimdi ilk sonsuz kardinal sayımızı bulalım:

Teorem 32.2. ω *bir kardinal sayısıdır.*

Kanıt: ω'nın kendisinden küçük bir ordinale, yani bir n doğal sayısına "eşlenik" olamayacağını kanıtlamamız gerekiyor. (Bundan böyle, aralarında eşleme olan kümelere ***eşlenik*** kümeler diyeceğiz.) Bunu n üzerine tümevarımla yapacağız.

ω'nın sonsuz olduğu, n'nin ise sonlu olduğu, dolayısıyla aralarında bir eşleme olamayacağı bariz de olsa, bu önermenin matematiksel olarak kanıtlanması gerekiyor.

$0 = \emptyset$ olduğundan, ω, 0 ile eşlenik olamaz. ω'nın n ile eşlenik olmadığını varsayıp, ω'nın $n + 1$ ile eşlenik olamayacağını kanıtlayalım. Çelişki elde etmek amacıyla ω'dan $n + 1$ sayısına



giden bir f eşlemesi ele alalım. $f(0) = k$ ve $f(m) = n$ olsun. (Bkz. bir yukardaki şekil.) Şimdi

$$g : \omega \setminus \{0\} \to n$$

fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

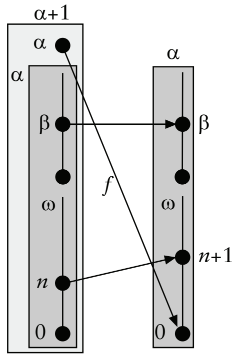
$$g(i) = \begin{cases} f(i) & \text{eğer } i \neq m \text{ ise} \\ v & \text{eğer } i = m \text{ ise} \end{cases}$$

f bir eşleme olduğundan, g de bir eşlemedir elbet. Aşağıdaki resim bunun bir kanıtı! Şimdi

$$h : \omega \to n$$

fonksiyonu

$$h(x) = g(x + 1)$$



olarak tanımlansın. g bir eşleme olduğundan h de bir eşlemedir. Bu, tümevarım varsayımımızla çelişir. □

Her ordinal bir kardinal olamaz, örneğin $|\omega + 1| = \omega$ olduğundan, $\omega + 1$ bir kardinal olamaz. Aslında $\alpha + 1$ biçiminde yazılan hiçbir sonsuz ordinal bir kardinal olamaz:

Teorem 32.3. *Sonsuz bir kardinal limit ordinal olmak zorundadır.*

Kanıt: α, herhangi bir sonsuz ordinal olsun. $|\alpha + 1| = |\alpha|$ eşitliğini kanıtlayacağız. α, sonsuz olduğundan, $\omega \leq \alpha$, yani $\omega \subseteq \alpha$, hatta ω, α'nın bir başlangıç dilimi. Şimdi

$$f : \alpha + 1 \to \alpha$$

fonksiyonunu yandaki resimdeki gibi ve aşağıdaki formülle tanımlayalım:

$$f(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } \beta = \alpha \text{ ise} \\ \beta & \text{eğer } \omega \leq \beta < \alpha \text{ ise} \\ \beta + 1 & \text{eğer } \beta < \omega \text{ ise} \end{cases}$$

f bir eşlemedir elbet. □

Ama bunun tersi doğru değildir, örneğin ω^2 bir limit ordinaldir ama $|\omega^2| = \omega$ olduğundan (neden?) bir limit ordinal olan ω^2 bir kardinal değildir.

Teorem 32.4. *Bir kardinal kümesinin bileşimi bir kardinaldir. Yani eğer* $(\kappa_i)_{i \in I}$ *bir kardinal ailesiyse,* $|\bigcup_{i \in I} \kappa_i| = \bigcup_{i \in I} \kappa_i$.

Kanıt: K bir kardinaller kümesi ve $\kappa = \cup K = \bigcup_{\alpha \in K} \alpha$ olsun. κ bir ordinaldir [Olgu 33.3'ten hemen sonrası]. $\beta < \kappa$ herhangi bir ordinal olsun. Eğer K'nın her α kardinali için, $\alpha \le \beta$ olsaydı, o zaman $\alpha \subseteq \beta$ olurdu ve $\kappa = \bigcup_{\alpha \in K} \alpha \subseteq \beta$, yani $\kappa \le \beta$ elde ederdik, bir çelişki. Demek ki bir $\alpha \in K$ için $\beta < \alpha$. Bu da $|\beta| < \alpha \le \kappa$ demektir. Dolayısıyla κ bir kardinaldir.

32.1. Üç Sonuç

Teorem 32.5. *X ve Y iki küme olsun. Ya X'ten Y'ye ya da Y'den X'e giden birebir bir fonksiyon vardır.*

Kanıt: X'le $|X|$ kardinali arasında, Y ile $|Y|$ kardinali arasında birer eşleme olduğundan, önermeyi kardinal sayıları için kanıtlamak yeterli. Ama kardinal sayıları birer ordinaldir ve herhangi iki ordinalden biri diğerinin altkümesidir (hatta bir başlangıç dilimidir, Sonuç 10.14).

Teorem 32.6. *X ve Y boş olmayan iki küme olsun. Ya X'ten Y'ye ya da Y'den X'e giden örten bir fonksiyon vardır.*

Kanıt: Önermeyi gene α ve β ordinal sayıları için kanıtlamak yeterli. $\alpha \subseteq \beta$ olsun (Sonuç 10.13). $\alpha \ne 0$ olduğundan, $0 \in \alpha$. Şimdi,

$$f(\gamma) = \begin{cases} \gamma & \text{eğer } \gamma < \alpha \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } \gamma \ge \alpha \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanmış $f : \beta \to \alpha$ fonksiyonu örtendir.

Teorem 32.7. *X ve Y kümeleri için aşağıdaki önermeler eşdeğerdir*:

a. $|X| \le |Y|$.

b. *X'ten Y'ye giden birebir bir fonksiyon var.*

c. *Y'den X'e giden örten bir fonksiyon var.*

Kanıt: (a $\Rightarrow$ b) ve (a $\Rightarrow$ c) yukardaki kanıtlardan çıkar.

(b $\Rightarrow$ a) X ve Y'nin birer kardinal olduklarını varsayabiliriz. Eğer $Y \le X$ ise, Cantor-Schröder-Bernstein Teoremi'ne göre [SKK], Y'yle X arasında bir eşleme vardır ve bu da önce $X = Y$ eşitliğini, bu da haliyle $X \le Y$ eşitsizliğini doğurur. Aksi halde $X < Y$.

(c $\Rightarrow$ b) Y'den X'e giden örten fonksiyona f diyelim.g,
$$\{f^{-1}(x) : x \in X\}$$
kümesinin bir seçim fonksiyonu olsun. Demek ki
$$g(f^{-1}(x)) \in f^{-1}(x) \subseteq Y$$
ve
$$f(g(f^{-1}(x))) = x.$$
Şimdi $h : X \to Y$ fonksiyonu
$$h(x) = g(f^{-1}(x))$$
olarak tanımlansın. $f(h(x)) = f(g(f^{-1}(x))) = x$ eşitliğinden dolayı h birebirdir.

ω_0 ve ω_1

ω yerine bazen ω_0 yazılır. ω_0 elbette en küçük sonsuz kardinal sayısıdır. "Elbette" dedik ama bu, Seçim Aksiyomu olmadan kanıtlanamaz. (Bkz. Sonuç 25.6.)

ω_0'dan daha büyük bir kardinal sayısı var mıdır?

Sadece ω_0'dan değil, her kardinal sayısından daha büyük bir kardinal sayısı vardır. Eğer α bir kardinal sayısıysa ve $\wp(\alpha)$, α'nın altkümeleri kümesiyse, $|\wp(\alpha)|$, α'dan daha büyük bir kardinal sayısıdır, çünkü α'dan $\wp(\alpha)$'ya giden birebir bir fonksiyon vardır (örneğin, $a \mapsto \{a\}$ fonksiyonu) ama bilindiği üzere α'dan $\wp(\alpha)$'ya giden örten bir fonksiyon yoktur [SKK]. Demek ki,Teorem 32.7'ye göre, $\alpha < |\wp(\alpha)|$.

Madem ki α kardinal sayısından daha büyük bir kardinal sayısı vardır, α'dan sadece "bir boy büyük" bir kardinal sayısı da vardır; yani α'dan büyük kardinal sayılarının en küçüğü vardır. Nitekim, boş olmayan

$$\{\beta \le |\wp(\alpha)| : \alpha < \beta \text{ ve } \beta \text{ kardinal}\}$$

ordinal kümesinin en küçük elemanı işte tam bu elemandır. α'dan sadece bir boy büyük olan kardinal sayısını α^+ olarak gösterelim. Demek ki

$$\alpha < \alpha^+ \le |\wp(\alpha)|$$

eşitsizlikleri ve

> *eğer* β *kardinal sayısı* $\alpha < \beta \le \alpha^+$ *eşitsizliğini sağlıyorsa o zaman* $\beta = \alpha^+$

önermesi doğrudur.

ω_0'dan bir boy büyük kardinal sayı ω_1 olarak yazılır: $\omega_1 = \omega_0^+$.

ω_1 elbette, sayılamaz sonsuzluktaki en küçük ordinaldir, dolayısıyla (eleman sayısı) sayılabilir sonsuzlukta olan ordinallerin kümesidir:

$$\omega_1 = \{\alpha : \alpha \text{ ordinal ve } |\alpha| \le \omega\}.$$

Bundan da sayılamaz sonsuzlukta sayılabilir ordinal olduğu çıkar (yoksa ω_1 sayılabilir sonsuzlukta olurdu.)

2ω, 3ω, 4ω gibi ordinallerin bileşimi olan ω^ω ve ω^ω, ω^{ω^ω}, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$ gibi ordinallerin bileşimi olan ε_0 ordinali ω_1'in elemanıdır.

Alıştırma. ω_1'in sayılabilir sonsuzluktaki her altkümesinin üstsınırı vardır. (Bu özelliği olan sıralı bir küme bulmak pek kolay değildir.)