Math 111 – Kümeler Kuramı
Vize

Kasım 2005
Ali Nesin

X boş olmayan bir küme olsun, sınav boyunca da öyle kalacak. X üzerine bir **filtre** X'in altkümelerinden oluşan ve şu şartları sağlayan bir kümedir (yani $\mathcal{F} \subseteq \wp(X)$):

i) Eğer $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subseteq B \subseteq X$ ise $B \in \mathcal{F}$.

ii) Eğer A ve B, $\mathcal{F}$'nin iki elemanı ise $A \cap B$ de öyledir.

iii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ve $X \in \mathcal{F}$.

I. Kısım

1. Eğer $\emptyset \neq A \subseteq X$ ise X'in A'yı içeren altkümelerinin kümesi olan $\mathcal{F}(A)$, X üzerine bir filtredir. Böyle filtrelere **başat** denir.

2. Eğer $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq X$ ise $\mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(A)$ olduğunu gösterin.

3. $A, B \subseteq X$ için, $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{F}(B) = \mathcal{F}(A \cup B)$ eşitliğini kanıtlayın.

4. X'in sonlu bir altkümesini içeren bir filtrenin başat olmak zorunda olduğunu kanıtlayın.

5. X'in sonsuz olduğunu varsayalım. X'in tümleyeni sonlu olan alt kümelerinin kümesi de X üzerine bir filtredir. Bu filtreye **Fréchet filtresi** denir.

6. Bir başat filtrenin Fréchet filtresini içermek zorunda olduğunu gösterin.

7. Filtrelerden oluşan herhangi bir kümenin elemanlarının kesişiminin de bir filtre olduğunu gösterin.

8. $\mathcal{B} \subseteq \wp(X)$ kümesi bir filtre tarafından içerilsin. $\mathcal{B}$'nin hiçbir $A_1, ..., A_n$ elemanı için $A_1 \cap ... \cap A_n = \emptyset$ eşitliği doğru olamaz. $\wp(X)$'in bu koşulu sağlayan bir $\mathcal{B}$ altkümesi için **sonlu kesişim özelliği**ni sağlıyor denir, kısaca **SKÖ.**

9. $(I, <)$ sıralı bir küme olsun öyle ki her $i, j \in I$ için öyle bir $k \in I$ olsun ki $i \leq k$ ve $j \leq k$ eşitsizlikleri sağlansın. Her $i \in I$ için, $\mathcal{F}_i$, X üzerine bir filtre olsun. $i < j$ için, $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$ olduğunu ve $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$'nin küme olduğunu varsayalım. $\cup_{i \in I} \mathcal{F}_i$'nin de bir filtre olduğunu gösterin.

10. $\wp(X)$'in sonlu kesişim özelliğini sağlayan bir $\mathcal{B}$ altkümesinin bir filtrenin içinde olduğunu kanıtlayın.

11. Maksimal bir filtreye ultrafiltre denir. X'in hangi A altkümeleri için $\mathcal{F}(A)$ ultrafiltredir?

12. Kanıtlayın: X üzerine bir $\mathcal{F}$ filtresi bir ultrafiltredir ancak ve ancak her $A \subseteq X$ için ya A ya da $X \setminus A$, $\mathcal{F}$'nin elemanıysa.

II. Kısım

13. $\mathcal{F}$, X üzerine bir filtre olsun. Y bir küme olsun. X'ten Y'ye giden fonksiyonların kümesini Fonk(X, Y) ile gösterelim. Fonk (X, Y) üzerine şu ikili ilişkiyi tanımlayalım:

$$f \equiv g \Leftrightarrow \{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}.$$

Bu ilişkini bir denklik ilişkisi olduğunu gösterin.

Bundan böyle X ve Y diye iki küme ve X üzerine bir $\mathcal{F}$ filtresi sabitleyelim ve $\equiv$ yukarıdaki gibi olsun. Fonk $(X, Y)/\equiv$ kümesine bakalım.

14. $\leq$ Y üzerine bir kısmi sıralama olsun. Fonk(X, Y) üzerine $\preccurlyeq$ ilişksini şöyle tanımlayalım:

$$f \preccurlyeq g \text{ ancak ve ancak } \{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{F}.$$

a) Bu ilişki Fonk(X, Y) üzerine bir kısmi sıralama verir mi? Eğer vermezse kısmi sıralamanın hangi özelliği sağlanmaz?

b) Eğer $f \preccurlyeq g$ ve $f \equiv f_1$ ve $g \equiv g_1$ ise $f_1 \preccurlyeq g_1$ olduğunu gösterin.

c) $\leq$ ilişkisinin Fonk $(X, Y)/\equiv$ üzerine ikili bir ilişki verdiği sonucuna ulaşın.

d) $\leq$ Y üzerine tamsıralama olsun ve $\mathcal{F}$, X üzerine bir ultrafiltre olsun. Fonk $(X, Y)/\equiv$ üzerine yukarıdaki gibi tanımlanan ikili ilişkinin tamsıralama olduğu sonucuna ulaşın.

e) $\leq$ ilişkisi Y üzerine iyisıralama olsun ve $\mathcal{F}$, X üzerine bir ultrafiltre olsun.
Func$(X, Y)/\equiv$ üzerine yukarıdaki gibi tanımlanan ikili ilişki iyisıralama mıdır?

15. $n \in \mathbb{N}$ pozitif bir doğal sayı olsun. (Başlagıçta $n = 1$ alabilirsiniz), $f : Y^n \to Y$ bir fonksiyon olsun. Şöyle bir fonksiyon tanımlayacağız:

$$f^* : \text{Fonk } (X, Y)^n \to \text{Fonk } (X, Y).$$

$g_1, ..., g_n \in$ Fonk (X, Y) için $f^*(g_1, ..., g_n)$, Fonk (X, Y)'nin bir elemanı olarak tanımlanmalı. Yani X'den Y'ye bir fonksiyon olmalı. Bu fonksiyonu tanımlayabilmek için herhangi bir x'te aldığı değeri söyleyebilmeliyiz. Bunu şöyle yapacağız:

$$f^*(g_1, ..., g_n)(x) = f(g_1(x), ..., g_n(x)),$$

ki bu gerçekten Y'nin bir elemanıdır. Şimdi soru: eğer $g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_n \in$ Fonk(X, Y) için $g_1 \equiv h_1, ..., g_n \equiv h_n$ ilişkileri sağlanıyorsa $f^*(g_1, ..., g_n) \equiv f^*(h_1, ..., h_n)$ ilikisi de sağlanır.

16. Yukarıdaki soruyu aklınızda bulundurarak, $f : Y^n \to Y$ fonksiyonunun

$$[f] : \text{Fonk}(X, Y)^n \to \text{Fonk}(X, Y)$$

Fonksiyonuna yol açtığını açıklayınız.