Kümeler Kuramı

Vize
Mayıs 2003
Ali Nesin

X bir küme olsun. X'in alt kümelerinden oluşan bir $\Im$ kümesi

i) Eğer $A \in \Im$ ve $A \subseteq B \subseteq X$ ise $B \in \Im$.
ii) Eğer A ve B $\Im$'nin elemaları ise $A \cap B$ de $\Im$'nin elemanıdır.
iii) $\emptyset \notin \Im$ ve $X \in \Im$.

şartlarını sağlıyosa $\Im$'ye X üzerine bir **filtre** denir.

A, X'in boş olmayan bir altkümesi olsun. X'in A'yı içeren bütün altkümelerinin kümesi $\Im(A)$, X üzerine bir filtredir. Bu filtreye **başat filtre** denir.

Eğer X sonsuz ise, X'in tümleyeni sonlu olan altkümeler kümesi de X üzerine bir filtredir. Bu filtreye **Fréchet filtresi** denir.

Maksimal bir filtreye **ultrafiltre** denir.

Bir X kümesi sabitleyelim.

1. X üzerine bir $\Im(A)$ başat filtresi bir ultrafilredir ancak ve ancak A tek elemanlı bir kümeyse.
2. (Sonsuz bir küme üzerine) Bir Fréchet filtresinin başat alamayacağını gösterin.
3. Bir filtreler kümesinin elemanlarının kesişimini de bir filtre olduğunu gösterin.
4. X'in altkümelerinden oluşan bir $\Im$ kümesinin herhangi bir sonlu sayıda $A_1, A_2, ..., A_n$ elemanı için $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \neq \emptyset$ koşulunu sağlanıyorsa $\Im$'yi içeren bir filtre olduğunu kanıtlayın. Bu filtreyi $A_1, A_2, ..., A_n$ cinsinden ifade edin.
5. $\Im$ bir ultrafilredir ancak ve ancak herhangi bir $A \subseteq X$ için ya A ya da A^c $\Im$'nin elemanıdır (ama ikisi birden $\Im$'nin elemanı değildir).
6. X'in sonlu bir altkümesini içeren bir ultrafiltrenin başat filtre olduğunu gösterin. Başat olmayan her ultrafiltrenin Fréchet filtresini içerdiği sonucuna varın.
7. (Seçim Aksiyomu) X üzerine herhangi bir $\Im$ filtresi için $\Im$'yi içeren bir ultrafiltre olduğunu gösterin.
8. (Seçim Aksiyomu) Eğer X sonsuzsa, X üzerine başat olmayan ultrafiltreler olduğunu gösterin.
9. $\Im$, X üzerine bir filtre olsun. Her $x \in X$ için bir A_x kümesi alalım.

$$\Pi_{x\in X} A_x := \{f = (f_x)_{x\in X} : \text{her } x \in X \text{ için } f_x \in A_x\} = \{f : X \to \cup_{x\in X} A_x : f(x) \in A_x\}$$

çarpımına bakalım.

$\Pi_{x\in X} A_x$ üzerine $\equiv$ ilişkisini şu şekilde tanımlayalım:

$$f \equiv g \Leftrightarrow \{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \Im.$$

Bu ilişkinin bir denklik ilişkisi olduğunu gösterin. Bundan sonra X üzerine bir $\Im$ filtresi belirleyeceğiz ve $M = \Pi_{x\in X} A_x/\equiv$ olacak. Eğer $f \in \Pi_{x\in X} A_x$ ise $[f]$ ile $f$nin denklik sınıfını göstereceğiz

10. Eğer her $x \in X$ için $A_x = A$ ise ve $\Im$ başat olmayan bir filtre ise A'nın bir a elemanını sabit a fonksiyonunun sınıfına yollayan fonksiyon A'dan M'ye birebir bir fonksiyondur.
11. Her A_x kümesinin $<$ ile sıralandığını varsayalım. M üzerine $<$ ilişkisini

$$[(f_x)_{x\in X}] < [(g_x)_{x\in X}] \Leftrightarrow \{x \in X : f_x < g_x\} \in \Im$$

olarak tanımlayalım. Bu ilişkinin M üzerine bir sıralama tanımladığını gösterin.

12. Eğer $\Im$ bir ultrafiltreyse ve her $(A_x, <)$ tamsıralanmış ise $(M, <)$ de tamsıranlanmış olduğunu gösterin.
13. Her $(A_x, <)$ kümesinin bir en büyük elemanı olduğunu varsayalım. $(M, <)$ kümesinin de en büyük elemanı var mıdır?
14. Her $(A_x, <)$ kümesinin iyisıralanmış olduğunu varsayalım. $(M, <)$ kümesi de iyisıralanmış mıdır?