Math 112 Final
Haziran 7 ,2005
Ali Nesin

1. *B bir küme olsun ve $A \subseteq B$ olsun. A'nın < ile iyi sıranlanmıi olduğunu varsayalım. A'nın üzerindeki < iyisıralamasını B'ye, A'nın B'nin bir başlagıç dilimi olacak biçimde genişletilebileceğini gösterin.* (10 puan)

Kanıt: Z aşağıdaki koşulları sağlayan iyisıralı $(X, <)$ kümelerinin kümesi olsun:
a) $A \subseteq X \subseteq B$,
b) $(X, <)$, A'nın üzerindeki < sıralamasının bir altsıralamasıdır,
c) A, X'in bir başlangıç dilimidir
Z'yi şu şekilde sıralayalım: $(X, <_X) \leq (Y, <_Y)$ eğer
a) $X \subseteq Y$,
b) $(X, <_X)$, $(Y <_Y)$'in bir altsıralamasıdır,
c) X, Y'nin bir başlangıç dilimidir
koşulları sağlanıyorsa. O zaman Z boş olmayan ve tümevarımsal bir kümedir: Eğer $(X_i, <_i)_{i\in I}$, Z'nin bir zinciriyse $\cup_{i\in I} X_i$ kümesi de doğal bir biçimde X_i 'lerin hepsini altsıralama olarak bulunduracak şekilde iyisıralanabilir, ve hatta her $i \in I$ için $X_i \leq \cup_{i\in I} X_i$ koşulu da geçerli olur.

Zorn Önsavı'ndan Z'nin bir maksimal elemanı olduğu çıkar, bu eleman $(C, <)$ diyelim. Eğer $C \subset B$ ise herhangi bir $b \in B \setminus C$ için C'nin sıralamasını $C \cup \{b\}$ kümesine b'yi bütün elemanlardan büyük tutarak genişletebiliriz. O zaman $(C, <) < (C \cup \{b\}, <)$ koşulu sağlanır, fakat bu $(C, <)$ sıralamasının maksimalliği ile çelişir.

Bir **kardinal sayı** κ kendisinden küçük bir ordinalle arasında birebir bir eşleme bulunmayan bir ordinaldir.

2. *Her doğal sayının bir kardinal olduğunu gösterin.* (5 puan)

Kanıt: Herhangi bir $n \in \omega$ için n'nin kendisinden küçük herhangi bir m ile arasında birebir eşlenemeyeceğini göstereceğiz. Bu her doğal sayının bir kardinal olduğunu gösterecek. Açıkça 0 kardinaldir. Şimdi n'nin kardinal olduğunu kabul ederek $S(n)$'nin kardinal olduğunu göstereceğiz. $S(n) = n \cup \{n\}$ kümesinin elemanlarından birisi ile birebir eşlenebileceğini varsayalım ve bu elemena m, eşlemeye de f diyelim. $f(n) = i$ olsun. Bu durumda f'yi n'den $m \setminus \{i\}$'ye giden birebir bir fonksiyona kısıtlayabiliriz; f'den kısıtlayarak elde ettiğimiz bu fonksiyona g diyelim. $i \in m$ olduğunda ve, $m \neq 0$ olduğundan öyle bir k vardır ki $m = S(k)$ eşitliği doğrudur. $h : m \setminus \{i\} \to k$ fonksiyonunu $j < i$ iken $h(j) = j$ olarak, $j > i$ iken $h(j) = j - 1$ olarak tanımlayalım. O zaman h $m \setminus \{i\}$'den k'ya giden birebir ve örten bir fonksiyondur. Yani $h \circ g : n \to k$ birebirdir. Ama $k < S(k) = m \leq n$ eşitsizliğinden dolayı bu durum tümevarım varsayımıyla çelişmektedir.

3. *ω'nın bir kardinal olduğunu gösterin.* (4 puan)

Kanıt: ω ve herhangi bir $n \in \omega$ doğal sayısı arasında birebir bir fonksiyon olamayacağını göstereceğiz. Tümevarım kullanacağız. Eğer $n = 0$ ise her şey açık. $f : \omega \to S(n)$'ye birebir bir fonksiyon olsun. $f(0) = i \in S(n)$ eşitlğini varsayalım. O zaman $f \circ S : \omega \to S(n) \setminus \{i\}$ de birebirdir. Yukarudaki gibi, $S(n) \setminus \{i\}$ ve n arasında öyle bir birebir ve örten bir fonksiyon bulabiliriz. Bu durumda $g \circ f \circ S$ ω'dan n'ye birebir bir fonksiyon verir ve bu da tümevarım hipotezi iler çellişir.

4. *Kardinal olmayan bir ordinal bulun.* (2 puan)

Kanıt: $S(\omega)$ kardinal değildir. $f : S(\omega) \to \omega$ fonksiyonu her $f(\omega) = 0$ ve $f(n) = S(n)$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyon birebir ve örtendir.

5. *Bir X kümesi için birebir eşlenebileceği bir κ kardinali olduğunu ve κ'nın biricik olduğunu*

gösterin. κ'ya X'in kardinalitesi denir ve |X| olarak gösterilir. (5 puan)

Kanıt: 1. soruda $A = \emptyset$ alırsak X'in iyi sıralı olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla X ve bir ordinal arasında birebir ve örten bir fonksiyon bulabiliriz, bu ordinale α diyelim.

$$U = \{\beta \in S(\alpha) : X \text{ ve } \beta \text{ arasında birebir ve örten fomksiyon vardır}\}$$

kümesine bakalım. U $S(\alpha)$'nın boş olmayan bir altkümesidir, çünkü $\alpha \in U$. Doalyısıyla U'nun bir en küçük elemanı vardır, diyelim β. Yani X *ve* β arasında birebir ve örten bir fonksiyon vardır ve X ile β 'dan dah küçük herhangi bir ordinal arasında birebir ve örten bir fonksiyon yoktur. Yani β kardinaldir.

6. *Eğer X sonsuzsa (yani $|X| \geq \omega$) ve $x \in X$ ise $|X \setminus \{x\}| = |X|$ eşitliğini kanıtlayın.* (8 puan)

Kanıt: 1. sorudan dolayı X'i en küçük elemanı x olacak şekilde iyi sıralayabiliriz. Bu durumda $X = \kappa$ bir kardinaldir ve $x = 0$. κ ve $\kappa \setminus \{0\}$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu göstereceğiz. κ sonsuz olduğu için, $\omega \subseteq \kappa$ ve ω ile $\omega \setminus \{0\}$ arasında bir eşleşme bulmak yetrlidir. S aradığımız gibi bir eşlelmedir.

7. *Eğer α kardinali ω'dan büyükeşitse limit ordinaldir.* (5 puan)

Kanıt: Eğer α sonsuz bir ordinal ise $S(\alpha)$'nın kardinal olamayacağını göstermeliyiz. $S(\alpha)$ ve α arasında bir eşleşme olduğunu göstereceğiz. Bu durumda $S(\alpha)$ bir kardinal olamayacak. 7. soruda $X = S(\alpha)$ alarak istediğimiz sonucu elde edebiliriz.

8. *Her κ kardinali için öyle bir biricik λ kardinali vardır ki $\kappa < \lambda$ ve hiçbir α karidnali için $\kappa < \alpha < \lambda$ eşitsizliği doğru değildir. Bu kardinali κ^+ olarak göstereceğiz.*(6 puan)

Kanıt: $|\wp(\kappa)| = \lambda$ diyelim. Eğer $\lambda \leq \kappa$ ise $\wp(\kappa)$'den κ'ya, f diye birebir bir fonksiyon bulabiliriz. $g : \kappa \to \wp(\kappa)$ fonksiyonunu $\alpha \in f(\wp(\kappa))$ için $g(\alpha) = f^{-1}(\alpha)$ ve $\alpha \notin f(\wp(\kappa))$ için $g(\alpha) = \emptyset$ olarak tanımlayalım. O zaman g örtendir. Ama böyle bir fonksiyon olamayacağını biliyoruz.

9. *α ve β iki kardinal olsun. Birbirinden ayrık öyle A ve B kümeleri bulun ki $|A| = \alpha$ ve $|B| = \beta$ eşitlikleri doğru olsun.* (2 puan)

Kanıt: $A = \alpha \times \{0\}$ ve $B = \beta \times \{1\}$ olsun.

10. *α, β, A ve B önceki sorudaki gibiyken,*

$$\alpha + \beta = |A \cup B|$$
$$\alpha\beta = |A \times B|$$
$$\alpha^\beta = |A^B|$$

işlemlerini tanımlayalım. (Burada A^B, B'den A'ya giden fonksiyonların kümesidir). Bu tanımların geçerli olabilmesi için ihtiyacımız olan koşul nedir? (2 puan) *Üç tanımda da A ve B'nin ayırk olamaları gerekli midir*? (3 puan)

11. $\kappa < 2^\kappa$ eşitsizliğini kanıtlayın. (4 puan)
12. Herhangi bir κ kardinali için $\kappa + 0$, 0κ, κ^0, 0^κ, 1κ, κ^1, 1^κ ifadelerini hesaplayın. (3 puan)
13. Herhangi α, β, γ kardinalleri için

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$
$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$
$$\alpha\beta = \beta\alpha$$
$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$
$$\alpha^\beta\alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$$
$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$$
$$\alpha^\gamma\beta^\gamma = (\alpha\beta)^\gamma$$

eşitliklerini kanıtlayın. (16 puan)

14. $(\alpha_i)_{i\in I}$ bir kardinaller ailesi olsun. Farklı her $i, j \in I$ için $|A_i| = \alpha_i$ and $A_i \cap A_j = \varnothing$ şartlarını sağlayan bir $(A_i)_i$ kümeler ailesi olduğunu gösterin (2 puan)

15. $(\alpha_i)_{i\in I}$ and $(A_i)_i$ bir önceki sorudaki gibi olsun.

$$\textstyle\sum_{i\in I} \alpha_i = |\bigcup_{i\in I} A_i|$$

ve

$$\textstyle\prod_{i\in I} \alpha_i = |\prod_{i\in I} A_i|$$

olarak tanımlansın. İki tanımda da A_i kümelerinin ayrık olması gerekli midir? (2 puan)

16. $(\alpha_i)_{i\in I}$ bir kardinaller ailesi olsun. Bir α, kardinali ve i göstergeci için $\alpha_i = \alpha$ olduğunu varsayalım. $\sum_{i\in I} \alpha_i = \alpha|I|$ and $\prod_{i\in I} \alpha_i = \alpha^{|I|}$ eşitliklerini kanıtlayın. (6 puan)

17. $(\alpha_i)_{i\in I}$ ve $(\beta_i)_{i\in I}$ iki kardinal ailesi olsun. Her $i \in I$ için $\alpha_i \leq \beta_i$ eşitsizliğini varsayalım.

$$\textstyle\sum_{i\in I} \alpha_i \leq \sum_{i\in I} \beta_i \text{ ve } \prod_{i\in I} \alpha_i \leq \prod_{i\in I} \beta_i$$

eşitsizliklerini kanıtlayın. (6 puan)

18. $(\alpha_i)_{i\in I}$ ve $(\beta_i)_{i\in I}$ iki kardinal ailesi olsun. Her $i \in I$ için $\alpha_i \leq \beta_i$ eşitsizliği doğruysa $\sum_{i\in I} \alpha_i < \prod_{i\in I} \beta_i$ eştisizliği de doğrudur (König Teoremi). (20 puan)