MIT Açık Ders Malzemeleri
http://ocw.mit.edu

18.701 Cebir 1
2007 Güz

Almaşık (Alterne) Grup

Hiç özalt grubu olmayan ve birden fazla eleman barındıran gruplara *basit grup* denir. Çift permütasyonların grubuna *Almaşık grup* A_n denir. Amacımız şu sonucu ispatlamak:

Teorem *Almaşık grup A_n, $n \geq 5$ için basittir*

Resmi tamamlamak için A_2 grubunun bariz grup olduğunu kaydedelim. A_3 grubu üçüncü mertebeden devirli gruptur, yani bu grup da basittir. Ancak A_4 basit değildir. Birim elemandan ve $(\mathbf{12})(\mathbf{34})$, $(\mathbf{13})(\mathbf{24})$, $(\mathbf{14})(\mathbf{23})$ devrinim (transpozisyon) çarpımlarından oluşan N kümesi A_4'ün bir normal altgrubunu verir.

Lemma 1 *$n \geq 3$ için A_n almaşık grubu üçlü çevrimlerle üretilir.*

Bu lemmanın kanıtı ödev olarak verilmişti. □

Lemma 2 *(i) Üçlü çevrimler S_n simetrik grubu içinde tek bir eşlenik sınıfı oluşturur. (ii) $n \geq 5$ için üçlü çevrimler A_n almaşık grubu içinde tek bir eşlenik sınıfı oluşturur.*

(Üçlü çevrimler A_3 ve A_4 gruplarında ikişer farklı eşlenik sınıfı oluşturur.)

Kanıt. (i) $(\mathbf{123})$ çevrimini p ile gösterelim ve gelişigüzel farklı $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ için $q = (\mathbf{ijk})$ olsun. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ işaretlerini şu şekilde "yeniden adlandıran"

$$\mathbf{i} \mapsto \mathbf{1}\,,\; j \mapsto \mathbf{2}\,,\; k \mapsto \mathbf{3},$$

ve bunun dışında gelişigüzel olan bir α permütasyonu verilsin. Tabloyla verecek olursak $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & .. & \mathbf{u} & .. \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & .. & \mathbf{v} & .. \end{smallmatrix}\right)$ biçiminde olur (burada $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}$ gelişigüzel seçimi simgelemektedir.) O halde $\alpha q \alpha^{-1}$ permütasyonu şu işi yapar:

"önce α^{-1} ile adlandırmayı geri çek, q uygula, sonra α ile yeniden adlandır"

Örneğin $\mathbf{1} \mapsto \mathbf{i} \mapsto \mathbf{j} \mapsto 2$ vs. gibi. Bu permütasyonu hayal etmenin eniyi yolu şu karma gösterimdir: (burada permütasyonları ters sırayla yazıyoruz. Böylece permütasyonları çarparken soldan sağa okuyabiliriz:)

$$\underbrace{\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & .. & \mathbf{v} & .. \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & .. & \mathbf{u} & .. \end{smallmatrix}\right)}_{\alpha^{-1}} \quad \underbrace{(\mathbf{ijk})}_{q} \quad \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & .. & \mathbf{u} & .. \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & .. & \mathbf{v} & .. \end{smallmatrix}\right)}_{\alpha} \quad = (\mathbf{123}) \tag{3}$$

Böylece $q = (\mathbf{ijk})$ permütasyonunun simetrik grup içinde $(\mathbf{123})$ üçlü çevrimine eşlenik olduğunu göstermiş olduk.

(ii) $n \geq 5$ varsayalım ve α yukarıdaki gibi olsun. Eğer α bir çift permütasyonsa, (3) eşitliğinden q ve p'nin almaşık grupta eşlenik olduğu çıkar. Şimdi α tek permütasyondur varsayıp ve τ ile $(\mathbf{45})$ devrinimini gösterelim. O halde $\beta = \tau\alpha$ çift olur ve

$$\beta q \beta^{-1} = \tau\alpha q \alpha^{-1}\tau^{-1} = \tau p \tau^{-1} = (\mathbf{54})(\mathbf{123})(\mathbf{45}) = p$$

elde edilir. Yani q almaşık grup A_n içinde de p'ye eşleniktir. $\square$

Şimdi Teoremin kanıtına geçelim. Birim elemandan ibaret olmayan bir $N \subset A_n$ normal altgrubu olsun. $N = A_n$ olduğunu göstermek istiyoruz. N'nin bir üçlü çevrim içerdiğini göstermek yeterli olacaktır. Zira bu doğruysa Lemma 2'den N'nin tüm üçlü çevrimleri içerdiği, Lemma 1'den de $N = A_n$ eşitliği çıkar.

N'nin bir normal altgrup olduğunu ve birim eleman dışında bir x permütasyonu içerdiğini biliyoruz. N'nin elemanlarının tersini, eşleniğini alıp biribiriyle çarpmamıza izin var. Mesela, gelişigüzel bir $g \in A_n$ elemanı için, gxg^{-1} ve x^{-1} de N içindedir. Dolayısıyla $gxg^{-1}x^{-1}$ komütatörü de N'de içerilir. g gelişigüzel alındığından bu komütatörler bize N'den birçok eleman verir.

İlk adım olarak x yerine x'in işimize gelen bir kuvvetini alalım. x'in bir kuvveti asal mertebeli olacaktır ve x yerine bu kuvveti alabiliriz. (Mesela x'in mertebesi 12 ise x^6'nın mertebesi 2'dir.) Yani x asal mertebelidir varsayabiliriz. Bu mertebe ℓ olsun. O zaman x permütasyonu ℓ-li çevrimler ve birli çevrimlerden oluşur.

Üç durumu ayırıp ($\ell \geq 5$, $\ell = 3$ ve $\ell = 2$) her durumda uygun bir komütatörü hesaplayarak bir üçlü çevrim bulmaya çalışacağız. Uygun elemanlar denemeyle bulunabilir. Çevrim gösterimini kullanıp $gxg^{-1}x^{-1}$ komütatörünü şöyle hesaplayacağız:

"önce x^{-1} uygula, sonra g^{-1}, sonra x, sonra g"

Durum 1: x'in mertbesi $\ell \geq 5$.

İşaretlerin ait olduğu $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$ kümesinin elemanlarının nasıl adlandırıldığının bir önemi yoktur, dolayısıyla x permütasyonunun $(\mathbf{12345}\ldots\boldsymbol{\ell})$ çevrimini içerdiğini varsayıp $x = (\mathbf{12345}\ldots\boldsymbol{\ell})m$ yazabiliriz; burada m kalan $\boldsymbol{\ell}+\mathbf{1}, \ldots \mathbf{n}$ işaretlerinin bir permütasyonunu göstermektedir. Şimdi $g = (\mathbf{432})$ alırsak $gxg^{-1}x^{-1}$ şu permütasyon olur:

$$[m^{-1}(\boldsymbol{\ell}\ldots\mathbf{54321})](\mathbf{234})[(\mathbf{12345}\ldots\boldsymbol{\ell})m](\mathbf{432})] = (\mathbf{245}).$$

Burada ve bundan sonra m^{-1} ve m terimleri biribirini götürür çünkü ele aldığımız çevrimle kesişmezler. Elde ettiğimiz komütatör bir üçlü çevrim olduğundan, bu durumu halletmiş olduk.

Durum 2: x'in mertebesi $\ell = 3$. Eğer x bir üçlü çevrimse gösterecek birşey yok demektir. Değilse, x en azından iki üçlü çevrim içermelidir; $x = (\mathbf{123})(\mathbf{456})m$ diyelim. Burada m, geride kalan işaretlerin bir permütasyonudur. Şimdi $g = (\mathbf{432})$ alırsak $gxg^{-1}x^{-1}$ şu permütasyon olur:

$$[m^{-1}(\mathbf{654})(\mathbf{321})](\mathbf{234})[(\mathbf{123})(\mathbf{456})m](\mathbf{432})] = (\mathbf{15243}).$$

Yani komütatörün mertebesi beştir, bu da bizi Durum 1'e geri götürür.

Durum 3a: x'in mertbesi $\ell = 2$ ve x 1 birli çevrim içerir. Bir çift permütasyon olduğundan x en azından 2 ikili çevrim içermelidir; $x = (\mathbf{12})(\mathbf{34})(\mathbf{5})m$ diyelim. Şimdi $g = (\mathbf{531})$ alırsak $gxg^{-1}x^{-1}$ şu permütasyon olur:

$$[m^{-1}(\mathbf{5})(\mathbf{43})(\mathbf{21})](\mathbf{135})[(\mathbf{12})(\mathbf{34})(\mathbf{5})m](\mathbf{531})] = (\mathbf{15243}).$$

Yani komütatörün mertebesi beştir, bu da bizi Durum 1'e geri götürür.

Durum 3b: x'in mertebesi $\ell = 2$ ve x birli çevrim içermez.

$n \geq 5$ olduğundan x ikiden fazla ikili çevrim içermelidir; $x = (\mathbf{12})(\mathbf{34})(\mathbf{56})m$ diyelim. Şimdi $g = (\mathbf{531})$ dersek $gxg^{-1}x^{-1}$ şu permütasyon olur:

$$[m^{-1}(\mathbf{65})(\mathbf{43})(\mathbf{21})](\mathbf{135})[(\mathbf{12})(\mathbf{34})(\mathbf{56})m](\mathbf{531})] = (\mathbf{153})(\mathbf{246}).$$

Yani komütatörün mertebesi üçtür, bu da bizi Durum 2'ye geri götürür.

$n \geq 5$ durumunda asal mertebeli çift permütasyonlar için tüm ihtimallere bakmış ve Teoremin kanıtını bitirmiş olduk. $\square$