18.701 Cebir 1

2007 Güz

D_1 nokta gruplu düzlem kristal grupları

Bu ders notunda düzlemin şu özel şartları sağlayan kesikli G izometri gruplarını sınıflıyoruz: (1) $L = \{v \,|\, t_v \in G\}$ kafesi iki bağımsız vektör içerir ve (2) $\overline{G}$ nokta grubu D_1 dihedral grubudur.

Düzlemin P noktalarını öteleme vektörlerinden ayırmamız en iyisi, bu sebeple ikinci bir uzayı, öteleme vektörlerinin V uzayını tanımlayalım. L kafesi V^+ toplamsal grubunun bir altgrubudur.

P ve V arasındaki tek fark, P'de hiçbir ayrıcalıklı nokta yokken sıfır vektörünün V'de orijini belirlemesidir. P'deki koordinatları serbestçe kaydırabiliriz.

Her m izometrisine $\pi(m)$ operatörünü iliştiren ve $\pi(t_v\rho_\theta) = \rho_\theta$ ve $\pi(t_v\rho_\theta r) = \rho_\theta r$ şeklinde tanımlanan $\pi : M \to O_2$ gönderimini V üzerinde bir operatör gibi düşünelim. Böylece $\overline{G}$ nokta grubu V üzerinde bir operatör grubu olur.

Gösterimi basitleştirmek için $\pi(m) = \overline{m}$ yazalım ve tutarlılık için $\overline{\rho}_\theta$ ve $\overline{r}$ ile V üzerinde etkiyen operatörleri gösterelim. Bu aynı zamanda M'nin elemanlarını O_2'nin elemanlarından ayırmaya da yardımcı olacak.

$\overline{G} = D_1$ dihedral grubu iki elemandan oluşur: birim eleman ve bir de yansıma: $\overline{G} = \{\overline{1}, \overline{r}\}$. Vektör uzayı V'nin koordinatlarını, $\overline{r}$ yansıması yatay eksene göre yansıma olacak şekilde seçelim. Bu seçim P üzerinde de bir koordinat sistemini, ötelemeleri dışında belirler.

Grubumuz G'nin nokta grubu $\overline{r}$ yansımasını içerdiğinden, G'de $\overline{g} = \overline{r}$ olacak şekilde bir eleman bulunur ve düzlemde bir orijin seçtiğimizde bu eleman $g = t_u r$ biçiminde yazılır.

Lemma 1. *G'deki ötelemelerin grubu, yani $v \in L$ şartını sağlayan t_v ötelemelerinin grubu H olsun. O halde G iki eşkümenin birleşimi olarak $H \cup Hg$ şeklinde yazılabilir.*

Kanıt. G bir grup ve g ve t_v $(v \in L)$ onun elemanları olduğundan $H \cup Hg \subset G$ elde ederiz. $G \subset H \cup Hg \subset G$ içerimini göstermek için gelişigüzel bir $h \in G$ seçelim. Eğer h bir ötelemeyse tanım itibarıyla H içindedir. Eğer h bir öteleme değilse, h'nin G'deki $\overline{h}$ görüntüsü $\overline{r}$ yansımasıdır. Bu durumda bir w için $h = t_w r$ olur. Şimdi $v = w - u$ diyelim. O zaman $hg^{-1} = t_w r r^{-1} t_{-u} = t_v$ elemanı G grubundadır, yani $v \in L$ ve $h = t_v g$ elemanı Hg eşkümesindedir. □

Her $g = t_u r$ elemanı için, $G = H \cup Hg$ birleşiminin bir grup olduğunu kaydedelim: H bir grup olduğundan, $HH \subset H$ ve $HHg \subset Hg$ olur. Eğer $h = t_v$ elemanı H grubundaysa, $gh = t_u r t_v = t_{\overline{r}u+v} r$ olur. Şimdi $\overline{r}u + v$ elemanı L kafesinde içerildiğinden gh elemanı Hg eşkümesindedir. Yani $gh \subset Hg$ bulduk. Buradan da $HgH \subset Hg$ ve $HgHg \subset H$ çıkar.

I. Kafesin biçimi

Bilmemiz gereken en önemli şey $\overline{G}$ nokta grubunun L üzerinde etkidiğidir: Yani $v \in L$ ise $\overline{r}v \in L$ olur.

Önerme 2. *Öyle yatay ve dikey* $a = \binom{a_1}{0}$ *ve* $b = \binom{0}{b_2}$ *vektörleri vardır ki, eğer* $c = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}\binom{a_1}{b_2}$ *ise, ya* $L = L_1 = \mathbb{Z}a+\mathbb{Z}b$ *dikdörtgen kafesidir, ya da* $L = L_2 = \mathbb{Z}a+\mathbb{Z}c$ *"ikizkenar üçgen" kafesidir.*

$b = 2c - a$ eşitliği nedeniyle $L_1 \subset L_2$ olur. L_2 kafesi L_1 kafesine diktörtgenlerinin merkezi eklenerek elde edilir. L kafesinin betimlemesinde iki "ölçek" parametresi vardır. Kristalografi bu parametreleri ihmal eder, ancak dikdörtgen ve ikizkenar kafesleri biribirinden ayırdeder.

Kanıt. Eğer $\binom{v_1}{v_2}$ vektörü L'deyse, $\overline{r}v = \binom{v_1}{-v_2}$ vektörü de L'dedir. O halde $v + \overline{r}v = \binom{2v_1}{0}$ ve $v - \overline{r}v = \binom{0}{2v_2}$ vektörleri sırasıyla L'nin yatay ve dikey vektörleridir. Şimdi $a = \binom{a_1}{0} \in L$ olacak şekilde en küçük pozitif a_1 gerçel sayısını seçelim. L yatay vektörler içerdiğinden ve kesikli bir grup olduğundan bu mümkündür. Böylece L'deki tüm yatay vektörler a vektörünün tam katı olur. Benzer şekilde b_2 sayısını da seçelim. Böylece L'deki dikey vektörler $b = \binom{0}{b_2}$ vektörünün tam katı olur. Elde ettiğimiz $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{am + bn \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$ diktörtgen kafesi L_1 ile gösterirsek $L_1 \subset L$ olur. Eğer $L \neq L_1$ ise $L = L_2$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. Bunun için $L \neq L_1$ varsayalım ve L'de olup L_1'de olmayan bir $v = \binom{v_1}{v_2}$ vektörü seçelim.

Bu vektöre L'nin bir elemanını ekleyerek $0 \leq v_1 < a_1$ ve $0 \leq v_2 < b_2$ olacak şekilde v vektörünü ayarlayabiliriz. Yukarıda gördüğümüz gibi $\binom{2v_1}{0} \in L$ olur. Bu bir yatay vektör olduğuna göre, $2v_1$ sayısı a_1 sayısının tam katıdır ve $0 \leq v_1 < a_1$ eşitsizliği nedeniyle sadece iki ihtimal vardır: $v_1 = 0$ ya da $v_1 = \frac{1}{2}a_1$. Benzer şekilde, $v_2 = 0$ ya da $v_2 = \frac{1}{2}a_2$ olur. Böylece v şu dört vektörden biri olmalıdır: $0, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, c$. Sıfır vektörü olamaz çünkü $v \notin L_1$ ve L_1 kafesi 0 vektörünü içerir. Bu v vektörü $\frac{1}{2}a$ vektörü de olamaz zira a enküçük uzunluktaki yatay vektördür. $\frac{1}{2}b$ de olamaz zira a enküçük uzunluktaki dikey vektördür. Yani $v = c$ buluruz. □

II. G grubundaki kaymalar

G grubunda $\overline{g} = \overline{r}$ şeklindeki elemanlar $g = t_u r$ biçimindedir. Yani G bu türden elemanlar içerir, böyle bir eleman seçelim. Kaydetmemiz gereken birkaç nokta var:

- $g = t_u r$ izometrisi ya bir yansımadır ya da yatay bir hat boyunca bir kaymadır.
- $u = \binom{u_1}{u_2}$ vektörü L kafesinde olmayabilir.
- Yegane u yoktur: Eğer $v \in L$ ise $t_v g = tv + ur$ yine G'nin bir elemanıdır ve nokta grubunun aynı $\overline{r}$ elemanını temsil eder.

g'nin l kayma hattı yatay olduğundan, koordinatları öteleyerek l'yi yatay eksen kılabiliriz. g izometrisi hala $t_u r$ biçiminde kalır, ama bu sefer u yatay, yani $u_2 = 0$ olur. Yani $\overline{r}u = u$ ve $g^2 = t_u r t_u r = t_{2u}$ elemanı G grubundadır. Böylece $2u$ vektörünün L kafesinde olduğunu göstermiş olduk. Bu bir yatay vektör olduğundan, $2u$ vektörü a vektörünün tam katıdır. Soldan t_a ötelemesinin bir kuvvetiyle çarparak g elemanını $u = 0$ veya $u = \frac{1}{2}a$ olacak şekilde ayarlayabiliriz. Önümüzdeki iki ikilem

$$L = L_1 \text{ veya } L_2 \quad \text{ ve } u = 0 \text{ veya } \frac{1}{2}a$$

bize dört ihtimal bırakıyor.

İşimizi bitirmek için bu çeşit grup var mıdır yok mudur, varsa farklılar mıdır sorularına cevap vermemiz gerekiyor. Varlık kısmı $H \cup Hg$ bileşiminin bir grup olmasından çıkar ve farklı iki çeşir kafesimiz vardır. Ama eğer $u = \frac{1}{2}a$ ise aynı zamanda bir yansıma hattı olan farklı bir kayma hattı bulunur mu? Eğer $L = L_2$ ve $u = \frac{1}{2}a$ ise bu gerçekleşmez. Bu durumda $c = \frac{1}{2}(a + b)$ vektörü L'dedir, yani $t_{-c}g = t_{\frac{1}{2}b}r$ elemanı G'dedir. Bu hareket saf yansımadır zira $\frac{1}{2}b$ bir dikey vektördür. Koordinatlar ötelenerek bunlar yine elenir. Eğer $L = L_1$ ise bu artık vuku bulmaz, böylece üç çeşit grubumuz kalır.

Teorem 3. *Kesikli bir G düzlem izometrileri grubunun nokta grubu $D_1 = \{\overline{1}, \overline{r}\}$ olsun. Bu grubun öteleme grubu $H = \{t_v \in G\}$ olsun.*
(i) $L = \{v \,|\, t_v \in G\}$ kafesi Önerme 1'de verilen L_1 veya L_2 kafeslerinden biridir.
(ii) Eğer $g \in G$ öteleme değilse, g'nin $\overline{G}$'deki görüntüsü $\overline{r}$ ve $G = H \cup Hg$ olur.
(iii) Uygun koordinatlarda G şöyle bir g elemanı içerir:

a) Eğer $L = L_1$ ise $g = r$ veya $g = t_{\frac{1}{2}a}r$ olur.

a) Eğer $L = L_2$ ise $g = r$ olur.