18.701 Cebir 1
2007 Güz

Matris Üstel Fonksiyonu

1 Teoremler.

Gerçel veya karmaşık ve $n \times n$ boyutlu bir A matrisinin üstel fonksiyon altında aldığı değer, e^x fonksiyonunun Taylor serisinde A yerleştirerek elde edilir:

$$e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots . \tag{1.1}$$

Esas ilgimizi çeken fonksiyon t argumanını matris değerlere götüren şu fonksiyondur:

$$e^{tA} = I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots . \tag{1.2}$$

Teorem 1.3 *Yukarıda verilen (1.1) serisi, sınırlı karmaşık matris kümeleri üzerinde mutlak ve düzgün yakınsar.*

Teorem 1.4 *e^{tA} fonksiyonu t'nin türevlenir bir fonksiyonudur ve türevi Ae^{tA} matris çarpımıdır.*

Teorem 1.5 *Her ikisi $n \times n$ boyutlu ve karmaşık A ve B matrisleri değişmelilerse, yani $AB = BA$ sağlanıyorsa, $e^{A+B} = e^A e^B$ olur.*

Bu teoremden A ve B matrislerinin değişmeli olması şartı kaldırılamaz.

Sonuç 1.6 *Her $n \times n$ boyutlu A matrisi için, e^A üsteli tersinirdir, ve tersi de e^{-A} matrisidir.*

Gerçekten, A ve $-A$ değişmeli olduğundan $e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I$ elde edilir.

2 Yakınsak seriler hakkında.

Seri limitleri hakkında gereken ana bilgileri, Mattuck ve Rudin'in kitaplarına gönderme yaparak aşağıda sıralıyoruz. Bu yazarlar sadece gerçel değerli fonksiyonları ele almaktadır ancak ispatları karmaşık değerli fonksiyonlara da genellenir çünkü bir karmaşık fonksiyonun limiti ve türevi, gerçel ve sanal kısımları ayrı ayrı ele alarak tanımlanabilir.

Teorem 2.1 *(Mattuck, Teorem 22.2B, Rudin, Teorem 7.9) Pozitif reel sayılardan oluşan bir m_k dizisi verilsin ve $\sum m_k$ serisi yakınsasın. Eğer $u_k(t)$ fonksiyonları $a \le t \le b$ gerçel aralığında tanımlıysa ve bu aralıktaki her t için $|u_k(t)| \le m_k$ sağlanıyorsa, $\sum u_k(t)$ serisi bu aralıkta düzgün yakınsar.*

Teorem 2.2 *(Mattuck, Teorem 11.5B, Rudin, Teorem 7.17) Bir $a \le t \le b$ aralığında sürekli türevlenir $u_k(t)$ fonksiyon dizisi olsun. Bu aralıkta $\sum u_k(t)$ serisinin bir $f(t)$ fonksiyonuna yakınsadığını ve $\sum u'_k(t)$ serisinin bir $g(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını varsayalım. O zaman f türevlenir, ve türevi de g'dir.*

Bu teoremler matris değerli fonksiyonlar için de geçerlidir. Her matris girdisinin gerçel ve sanal kısımları üzerinde ayrı ayrı çalışarak bu gösterilebilir.

Şimdi sunacağımız temel lemmanın kanıtını basit olduğu için geçiyoruz. (Gerçel sayı serileri için lemma Mattuck, Teorem 7.2C ve Rudin, Teorem 3.47'de bulunabilir.)

Lemma 2.3 *Matris değerli ve $n \times n$ boyutlu $A_k^{(1)}, \cdots, A_k^{(r)}$ fonksiyonları olsun, $n \times n$ boyutlu $C_{(1)}, \cdots, C_{(r)}$ matrisleri verilsin ve $C_{(1)}A_k^{(1)} + \cdots + C_{(r)}A_k^{(r)}$ doğrusal bileşimi B_k ile gösterilsin. Eğer $\sum A_k^{(\alpha)}$ serisi $\alpha = 1, \ldots, r$ için ve bir $a \leq t \leq b$ aralığında $S_{(\alpha)}$ matrisine düzgün yakınsarsa $\sum B_k$ serisi de $C_{(1)}S^{(1)} + \cdots + C_{(r)}S^{(r)}$ matrisine yakınsar.*

Yeri gelmişken, matris değerli fonksiyonlar için çarpım kuralını kaydedelim:

$$\frac{d}{dt}(M_1 \cdots M_k) = \sum_{i=1}^{k} (M_1 \cdots M_{i-1}) \frac{dM_i}{dt} (M_{i+1} \cdots M_k)$$

3 Teoremlerin kanıtı

Teorem 1.3'ün kanıtı. Bir A matrisinin i, j-girdisini $(A)_{ij}$ ile gösterelim. Böylece AB çarpımının girdisi $(AB)_{ij}$ ile ve A^k kuvvetinin girdisi $(A^k)_{ij}$ ile gösterilir. Bu gösterimde e^A matrisinin i, j-girdisi

$$(e^A)_{ij} = (I)_{ij} + \frac{1}{1!}(A)_{ij} + \frac{1}{2!}(A^2)_{ij} + \frac{1}{3!}(A^3)_{ij} + \cdots.$$

toplamına eşittir. Üstel fonksiyonu tanımlayan serinin düzgün yakınsak olduğunu göstermek için A^k kuvvetlerinin girdilerinin çok hızlı büyümediğini göstermemiz gerekiyor.

Bir $n \times n$ boyutlu A matrisinin *normu*, bu matrisin girdi mutlak değerlerinin en büyüğü olarak veya

$$|(A)_{ij}| \leq \|A\|$$

özelliğini sağlayan enküçük sayı olarak tanımlanır.

Lemma 3.1 *A, B iki karmaşık $n \times n$ matris ise $\|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$ sağlanır ve her $k > 0$ için $\|A^k\| \leq n^{k-1}\|A\|^k$ olur.*

Kanıt. AB matrisinin i, j-girdisini kestirelim:

$$|(AB)_{ij}| = \left| \sum_{\nu=1}^{n} (A)_{i\nu}(B)_{\nu j} \right| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |(A)_{i\nu}|\,|(B)_{\nu j}| \leq n\|A\|\|B\|$$

Böylece $\|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$ eşitsizliğini göstermiş olduk. İkinci eşitsizlik birinciden tümevarımla çıkarılır. □

Şimdi üstel seriyi kestirmeye girişelim: a bir pozitif gerçel sayı olsun ve $n\|A\| \leq a$ sağlansın. Lemmaya göre (bir n artırarak) $|(A_k)_{ij}| \leq a^k$ olur. Dolayısıyla
(3.2)

$$|(e^A)_{ij}| = |(I)_{ij}| + \frac{1}{1!}|(A)_{ij}| + \frac{1}{2!}|(A^2)_{ij}| + \frac{1}{3!}|(A^3)_{ij}| + \cdots \leq 1 + \frac{1}{1!}a + \frac{1}{2!}a^2 + \frac{1}{3!}a^3 + \cdots.$$

Oran testinden sağdaki serinin yakınsadığı çıkar (ki limiti elbette e^a eder.) Teorem 2.1'den serinin $n\|A\| \leq a$ eşitsizliğini sağlayan A matrisleri için mutlak ve düzgün yakınsadığı çıkar. □

Teorem 1.4 ve Teorem 1.5'in kanıtı. Değişmeli ve $n \times n$ boyutlu A ve B matrisleri olsun. e^{tA+B} fonksiyonunun seri açılımını terim terim türevleyelim:

$$= I + \frac{1}{1!}(tA+B) + \frac{1}{2!}(tA+B)^2 + \frac{1}{3!}(tA+B)^3 + \cdots . \tag{3.3}$$

Çarpım kuralını kullanarak k dereceli terimin türevi için şu ifadeyi buluruz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{k!}(tA+B)^k\right) = \left(\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}(tA+B)^{i-1}A(tA+B)^{k-i}\right).$$

A ve B matrisleri değişmeli olduğundan, yani $AB = BA$ sağlandığından ortadaki A'yı sola çekebiliriz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{k!}(tA+B)^k\right) = kA\frac{1}{k!}(tA+B)^{k-1} = A\frac{1}{(k-1)!}(tA+B)^{k-1}. \tag{3.4}$$

Bu sonuncu ifade üstel seride $k-1$ dereceli terimin A ile çarpımına eşittir. Yani terim terim türevleyince Ae^{tA+B}'nin seri açılımı elde edilir.

Teorem 2.1'den A, B verildiğinde e^{tA+B} üstel serisinin her aralıkta düzgün yakınsadığı çıkar. Lemma 2.3'den türevlerin serisinin Ae^{tA+B}'ye her aralıkta düzgün yakınsadığı çıkar. Şimdi Teorem 2.2'yi kullanarak e^{tA+B} fonksiyonunun türevinin Ae^{tA+B} olduğu görülür, yani

$$\frac{d}{dt}e^{tA+B} = Ae^{tA+B}$$

olur. Bu eşitlik tüm A, B değişmeli matris çiftleri için geçerlidir. $B = 0$ alarak Teorem 1.4 kanıtlanır.

Şimdi, $e^{-tA}e^{tA+B}$ fonksiyonunu türevleyelim:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}e^{tA+B}\right) = \left(-Ae^{-tA}\right)\left(e^{tA+B}\right) + \left(e^{-tA}\right)\left(Ae^{tA+B}\right)$$

Üstel fonksiyonun tanımından A ve e^{-tA} matrislerinin değişmeli olduğu hemen görülür. Buradan yukarıdaki türevin sıfırlandığı çıkar ve bu $e^{-tA}e^{tA+B}$ fonksiyonunun bir C sabitine eşit olduğu anlamına gelir:

$$e^{tA+B} = e^{tA}C.$$

Bu her t için doğrudur. Bu eşitlikte $t = 0$ koyarsak $C = e^B$ buluruz. Şimdi $t = 1$ koyarsak $e^{A+B} = e^A e^B$ elde edilir ve Teomrem 1.5'in kanıtı böylece biter. □