18.701 Cebir 1

2007 Güz

İzometriler

$\mathbb{R}^n$ uzayının bir *izometrisi*, uzaklık-koruyan bir $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gönderimidir, yani her $\mathbb{R}^n$ uzayındaki her v ve w vektörü için

$$|m(v) - m(w)| = |v - w|$$

sağlanır. Gösterimi sadeleştirmek için $m(v)$ vektörünü v' ile temsil edeceğiz. Bu kabulle m'nin uzaklık-koruma özelliği şöyle yazılır:

$$|v' - w'| = |v - w| \quad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n.$$

İzometri örnekleri $t_a(x) = x + a$ ile tanımlanan t_a ötelemeleri ve ortogonal doğrusal dönüşümlerdir. İki izometrinin bileşimi yine bir izometridir.

Teorem 1 *$\mathbb{R}^n$ uzayının orijini sabitleyen izometrisi bir ortogonal doğrusal operatördür.*

Teorem 2 *$\mathbb{R}^n$ uzayının her izometrisi bir ortogonal doğrusal operatör ve ötelemenin bileşimidir.*

Teorem 3 *$\mathbb{R}^3$ üzerindeki determinantı 1 eden ortogonal doğrusal operatörler orijinden geçen eksenler etrafında dönmelerdir.*

Teorem 1'in çok temiz kanıtı birkaç sene önce bir 18.701 öğrencisi olan Sharon Hollander tarafından bulunmuştur.

Lemma 1 *$\mathbb{R}^n$ uzayında x ve y be vektörleri verilsin. Eğer $(x \cdot x)$, $(x \cdot y)$, $(y \cdot y)$ skaler çarpımları eşitse $x = y$ olur.*

Kanıt. $(x \cdot x) = (x \cdot y) = (y \cdot y)$ varsayalım. $x = y$ eşitliğini göstermek için $x - y$ vektörünün uzunluğunun sıfır olduğunu göstermek yeterli olur. Bunu $|x - y|^2$ ifadesini açarak görebiliriz:

$$((x - y) \cdot (x - y)) = (x \cdot x) - 2(x \cdot y) + (y \cdot y) = 0. \qquad \square$$

Lemma 2 *Orijini sabitleyen her izometri skaler çarpımı korur, bir başka deyişle her $v, w \in \mathbb{R}^n$ için şu eşitlik sağlanır:*

$$(v' \cdot w') = (v \cdot w).$$

Kanıt. $|v' - w'| = |v - w|$ eşitliğinden her v, w için

$$(*) \qquad ((v' - w') \cdot (v' - w')) = ((v - w) \cdot (v - w))$$

elde edilir. Varsayımımıza göre $0' = 0$ olduğundan $w = 0$ koyarak $(v' \cdot v') = (v \cdot v)$ elde edilir. Benzer şekilde $(w' \cdot w') = (w \cdot w)$ bulunur. Kanıtı tamamlamak için (*) ifadesi açılıp $(v \cdot v)$ ve $(w \cdot w)$ çarpımları her iki taraftan da silinir. $\square$

Teorem 1'in kanıtı. Doğrusal olduğunu gösterince m dönüşümünün ortogonal olduğu Lemma 2'den çıkacak.

Önce her $u, v \in \mathbb{R}^n$ için $m(u+v) = m(u) + m(v)$ eşitliğini ispatlayalım. Bunun için w ile $u+v$ toplamını gösterelim. Üslü gösterimimizi de kullanırsak kanıtlamak istediğimiz bağıntı $w' = u' + v'$ haline gelir.

Lemma 1'i $x = w'$ ve $y = u' + v'$ için uygulayalım. $w' = u' + v'$ eşitliğini göstermek için $(w' \cdot w') = (w' \cdot (u' + v')) = ((u' + v') \cdot (u' + v'))$ eşitliklerini, veya

$$(w' \cdot w') = (w' \cdot u') + (w' \cdot v') = (u' \cdot u') + 2(u' \cdot v') + (v' \cdot v')$$

eşitliklerini göstermek yeterlidir. Lemma 2 bu skaler çarpımlardan üsleri kaldırmamıza izin verir. Dolayısıyla

$$(w \cdot w) = (w \cdot u) + (w \cdot v) = (u \cdot u) + 2(u \cdot v) + (v \cdot v)$$

eşitliklerini göstermek yeterlidir. Ama $w = u + v$ olduğundan bu eşitlikler zaten doğrudur.

m operatörünün doğrusallığını göstermek için her $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve her c skaleri için $m(cv) = cm(v)$ eşitliğini de göstermek gerekir. Bunun kanıtı da benzer: cv yerine w yazarsak, $w' = cv'$ eşitliğini göstermemiz gerekiyor. Bunun için $(w' \cdot w') = (w' \cdot cv') = (cv' \cdot cv')$ eşitliklerini, veya

$$(w' \cdot w') = c(w' \cdot v') = c^2(v' \cdot v')$$

eşitliklerini göstermek yeterlidir. Lemma 2 bu skaler çarpımlardan üsleri kaldırmamıza izin verir, elde edilen eşitlikler $w = cv$ olduğu için doğrudur. □

Teorem 2'nin kanıtı. m bir izometri ve $a = m(0)$ olsun. Bir φ ortogonal operatörü için $m = t_a\varphi$ eşitliğini göstermek istiyoruz. Bu formül $t_{-a}m = \varphi$ formülüne denktir ve bu sonuncusu φ'yi belirler. Yani $t_{-a}m$'nin bir ortogonal doğrusal operatör olduğunu göstermeliyiz. İki izometrinin bileşimi olduğundan, $t_{-a}m$ de bir izometridir ve orijini sabitler. Theorem 1 ile kanıt tamamlanır. □

İzleyen lemma ders kitabının 4. Bölümünde, Lemma 5.23 olarak geçmektedir.

Lemma 3 *Determinantı* 1 *olan ortogonal doğrusal operatör* 1 *özdeğerine sahiptir.*

Lemma 4 $\mathbb{R}^3$ *üzerinde determinantı* 1 *olan bir ortogonal doğrusal operatör, eğer iki doğrusal bağımsız* v_1, v_2 *vektörlerini sabitliyorsa, birim operatördür.*

Kanıt. Operatörü p ile gösterelim. v_1 ve v_2 vektörlerinin her ikisine ortogonal olan bir v_3 vektörü alalım. Operatör ortogonal olduğundan, pv_3 de $v_1 = pv_1$ ve v_2 vektörlerine ortogonaldir. Üstelik, pv_3 vektörü v_3 ile aynı uzunluktadır. Yani $pv_3 \pm v_3$ olur. Operatörün matrisi, (v_1, v_2, v_3) tabanında şu hale gelir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Determinant $+1$ olduğundan, alttaki girdinin işareti $+$ ve p de birim operatör olur. □

Teorem 3'ün kanıtı. Bir ρ dönmesinin tanımına ihtiyacımız var. Şu üç şartı koşuyoruz:

- ρ orijini sabitleyen bir izometridir,
- ρ sıfır dışında bir v vektörünü sabitler, ve
- ρ operatörü v'ye dik olan düzlemi θ açısıyla döndürür.

ρ bir dönme olsun. Teorem 1'e göre ρ bir ortogonal doğrusal operatördür ve determinantı ± 1 değerlerini alabilir. Determinant θ dönme açısıyla sürekli değişir ve açı sıfırlandığında 1 değerini alır. Dolayısıyla her θ için $+1$ olmalıdır.

Öte yandan p birim determinantlı bir ortogonal doğrusal operatör olsun. Lemma 3'ten $pv_1 = v_1$ olacak şekilde bir v_1 vektörünün mevcut olduğu çıkar.

v_1 vektörüne ortogonal bir $v_2 \neq 0$ vektörü seçelim. Operatör ortogonal olduğundan, pv_2 vektörü $pv_1 = v_1$ vektörüne diktir ve v_2 ile aynı uzunluktadır. Yani hem v_2 hem de pv_2 vektörleri v_1 vektörüne dik düzlemde yer alır ve aynı uzunluktadır. Bu nedenle v_1 ekseni etrafında, v_2 vektörünü pv_2 vektörüne taşıyan bir dönme vardır. Üstelik, birim determinantlı ortogonal operatörlerin bileşimi olduğundan $\rho^{-1}p$ operatörü de birim determinantlı ortogonal bir operatördür. Lemma 4'ten $\rho^{-1}p$ operatörünün birim operatör olduğu çıkar, ve nihayet $p = \rho$ bulunur. □