18.701 Cebir 1

2007 Güz

Spektral Teorem

1 Hermisyen uzaylar

Üzerinde pozitif belirli bir hermisyen form $\langle\,,\rangle$ verilmiş olan bir karmaşık vektör uzayına *hermisyen uzay* denir.

$\mathbb{C}^n$ üzerinde tanımlı standart hermisyen form $\langle X, Y\rangle = X^*Y$ ile birlikte bir hermisyen uzaydır. Aksi belirtilmedikçe $\mathbb{C}^n$ uzayına hermisyen uzay dediğimizde bu standart formu kastediyoruz demektir.

Önerme 1.1 *V hermisyen uzayının bir W altuzayı olsun. $\langle\,,\rangle$ formu W üzerinde bozulmaz (dejenere değildir) ve dolayısıyla $V = W \oplus W^\perp$ olur.*

Kanıt. Bir formun W üzerinde bozulmaması; her $0 \neq w \in W$ için $\langle w, w'\rangle \neq 0$ olacak şekilde bir $w' \in W$ bulunması anlamına gelir. Form pozitif belirli olduğundan her $0 \neq w$ için $\langle w, w\rangle > 0$ sağlanır ve $w' = w$ alabiliriz. □

Lemma 1.2 *Bir V hermisyen uzayının v, v' vektörleri verilsin. Eğer her $x \in V$ için $\langle v, x\rangle = \langle v', x\rangle$ sağlanıyorsa $v = v'$ olur.*

Kanıt. Eğer $\langle v, x\rangle = \langle v', x\rangle$ ise $v - v'$ vektörü x'e ortogonaldir. Bu her x için geçerliyse, form V üzerinde bozuk olmadığından $v - v' = 0$ olur. □

Bir hermisyen uzayda ekseriyetle $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ şartını sağlayan $\boldsymbol{B} = (v_1, \ldots v_n)$ *ortonormal tabanlarıyla* çalışılır. Eğer $\boldsymbol{B}$ ortonormalse ve v, w vektörlerinin $\boldsymbol{B}$ tabanına göre koordinat vektörleri X, Y ise,

$$\langle v, w\rangle = X^*Y \tag{1.3}$$

olur. Dolayısıyla V, hermisyen formuyla birlikte $\mathbb{C}^n$ hermisyen uzayına izomorftur. Ancak elden geldiğince koordinatları sabitlemeden çalışmak arzu edilir.

Bir $n \times n$ karmaşık P matrisine, $P^*P = I$ şartını sağlıyorsa *üniter matris* denir. Bir matrisin üniter olması için sütunlarının $\mathbb{C}^n$ hermisyen uzayı için bir ortonormal taban oluşturması gerekir ve yeter.

Lemma 1.4 *Bir $\boldsymbol{B}$ ortonormal tabanı verilsin ve P matrisi $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'P$ taban değişiminin matrisi olsun. O zaman $\boldsymbol{B}'$ tabanının da ortonormal olması için P'nin üniter olması gerekir ve yeter.* □

2 Normal matrisler.

Bir A matrisinin *hermit-eşleniği (adjoint)* $A^* = \overline{A}^t$ matrisidir.[1] Hermit-eşlenik alma işlemi $(AB)^* = B^*A^*$ ve $A^{**} = A$ özelliklerini sağlar.

Eşleniğiyle değişmeli olan bir A matrisine *normal matris* denir: $A^*A = AA^*$. Bu matris sınıfı pek kayda değer olmasa da iki önemli matris sınıfını içinde barındırır: hermisyen matrisler ($A = A^*$) ve üniter matrisler ($AA^* = I$).

[1] Dikkat! Türkçe'de her tersinir X için XAX^{-1} matrisine de A'nın *bir eşleniği* (conjugate) denir. Yine burada $\overline{A}$ ile A'nın karmaşık-eşleniği (complex conjugate) gösterilmiştir. –ç.n.

Lemma 2.1 *A ve P iki $n \times n$ matris ve P üniter olsun*
(i) $PAP^{-1} = PAP^*$ eşlenik matrisinin hermit-eşleniği PA^*P^* matrisidir.
(ii) A normal, hermisyen veya üniterse, PAP^* de aynı özelliğe sahiptir. □

3 Normal, hermisyen ve üniter operatörler

V hermisyen uzayı üzerinde bir $T : V \to V$ doğrusal operatörü olsun, A matrisi T'nin $\boldsymbol{B}$ tabanındaki matrisi olsun. Aynı $\boldsymbol{B}$ tabanındaki matrisi A^* hermit-eşleniği olan $T^* : V \to V$ operatörüne T'nin *hermit-eşlenik operatörü* denir. Lemma 2.1-ii uyarınca bu tanım ortonormal tabandan bağımsızdır. Dahası, matrislerde olduğu gibi $(TU)^* = T^*U^*$ ve $T^{**} = T$ özellikleri sağlanır.

Önerme 3.1 *Bir V hermisyen uzayı üzerinde bir T doğrusal operatörü verilsin. Her $v, w \in V$ için*

$$\langle v, Tw\rangle = \langle T^*v, w\rangle \quad \text{ve} \quad \langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt. $v = \boldsymbol{B}X$ ve $w = \boldsymbol{B}Y$ için $\langle T^*v, w\rangle = (A^*X)^*Y = X^*AY = \langle v, Tw\rangle$ sağlanır. İkinci formül T ve T^* operatörlerinin rolleri değiştirilerek ispatlanır ($T^{**} = T$ olduğu için buna izin var). □

Bir hermisyen uzayı üzerindeki bir T operatörünün bir ortonormal tabandaki matrisi normal, hermisyen veya üniterse T operatörüne de *normal, hermisyen veya üniter* denir. Bu sırasıyla $T^*T = TT^*$, $T^* = T$ veya $T^*T = I$ şartının sağlandığı anlamına gelir. İzleyen önermede bu şartları yorumlayacağız.

Önerme 3.2 *Bir V hermisyen uzayı üzerinde bir T doğrusal operatörü verilsin.*
(i) T operatörünün normal olması için şu şart gerekir ve yeter:

$$\text{Her } v, w \in V \text{ için } \langle Tv, Tw\rangle = \langle T^*v, T^*w\rangle$$

(ii) T operatörünün hermisyen olması için şu şart gerekir ve yeter:

$$\text{Her } v, w \in V \text{ için } \langle v, Tw\rangle = \langle Tv, w\rangle$$

(iii) T operatörünün üniter olması için şu şart gerekir ve yeter:

$$\text{Her } v, w \in V \text{ için } \langle Tv, Tw\rangle = \langle v, w\rangle.$$

Kanıt. Önerme 3.1'den çıkar. Mesela, $\langle Tv, Tw\rangle = \langle T^*v, T^*w\rangle$ eşitliğine bakalım.
Önerme 3.1 uyarınca sol taraf $\langle T^*Tv, w\rangle$ değerine eşitken sağ taraf $\langle TT^*v, w\rangle$ eder. Yani T normalse eşitlik doğrudur. Bunun tersi T^*Tv ve TT^*v matrislerine Lemma 1.2 uygulanarak elde edilir. □

4 Spektral Teorem

Bir V uzayı üzerinde bir T doğrusal operatörü olsun. Eğer $TW \subset W$ sağlanıyorsa V'nin W altuzayına T *altında sabittir* denir. Eğer W altuzayı T altında sabitse, T'yi W'ye kısıtlayarak bir doğrusal operatör elde ederiz. Eğer T normal, hermisyen veya üniterse kısıtlı operatörün de aynı özelliğe sahip olacağı Önerme 3.2'den çıkar.

Önerme 4.1 *Bir V hermisyen uzayı üzerinde bir T doğrusal operatörü olsun ve V uzayının bir W altuzayı verilsin. Eğer W altuzayı T altında sabitse $W^{\perp}$ altuzayı da T^* altında sabittir. Eğer W altuzayı T^* altında sabitse $W^{\perp}$ altuzayı da T altında sabittir.*

Kanıt. W altuzayını T altında sabit varsayalım ve $u \in W^{\perp}$ diyelim. $T^*u \in W^{\perp}$ olduğunu, yani her $w \in W$ için $\langle w, T^*u\rangle = 0$ ettiğini göstermeliyiz. Önerme 3.1'den $\langle w, T^*u\rangle = \langle Tw, u\rangle$ çıkar. Şimdi W altuzayı T altında sabit olduğundan $Tw \in W$ olur. Öte yandan $u \in W^{\perp}$ olduğundan $\langle w, T^*u\rangle = \langle Tw, u\rangle = 0$ buluruz. Son iddia T ve T^* operatörlerinin rolünü değiştirerek ispatlanır.

Teorem 4.2 *Bir V hermisyen uzayı üzerinde bir T doğrusal operatörü olsun ve v vektörü T operatörünün λ özdeğerli bir özvektörü olsun. O halde v aynı zamanda T^* operatörünün de bir özvektörüdür ve $\overline{\lambda}$ özdeğerlidir.*

Kanıt. Durum 1: ($\lambda = 0$ için) $Tv = 0$ eder ve $T^*v = 0$ ettiğini göstermemiz gerekir. Form pozitif belirli olduğundan $\langle T^*v, T^*v\rangle$ eşitliğini göstermek yeterlidir. Önerme 3.2'den $\langle T^*v, T^*v\rangle = \langle Tv, Tv\rangle = \langle 0, 0\rangle = 0$ çıkar.

Durum 2. (Gelişigüzel λ'lar için.) $T - \lambda I$ doğrusal operatörünü S ile gösterirsek $Sv = 0$ olur. Dahası, $S^* = (T - \lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I$ eder. S'nin normal bir operatör olduğu gösterilebilir. Durum 1'den, $S^*v = T^*v - \overline{\lambda} v = 0$ bulunur ve v vektörünün T^* operatörünün $\overline{\lambda}$ özdeğerli bir özvektörü olduğu çıkar. □

Netice 4.3 *Bir hermisyen operatörün özdeğerleri birer gerçel sayıdır.*

Kanıt. T hermisyen operatörünün bir λ özdeğeri ve bu özdeğerli bir v özvektörü verilsin: $Tv = \lambda v$. T hermisyen olduğundan $T = T^*$ olur, dolayısıyla $\lambda v = Tv = T^*v = \overline{\lambda} v$ elde edilir. Yani $\lambda = \overline{\lambda}$ bulunur ve λ sayısının gerçel olduğu çıkar. □

Spektral Teorem 4.4 *T bir normal operatör olsun. V'nin T'nin özvektörlerinden ibaret bir tabanı vardır.*

Kanıt. V'nin boyutu üzerinde tümevarım uygulayalım. T'nin bir v_1 özvektörünü seçelim ve birim uzunlukta olacak şekilde normalize edelim. Teorem 4.2'den v_1 aynı zamanda T^* operatörünün de özvektörüdür. (v_1) vektörünün gerdiği bir-boyutlu W altuzayı v özvektör olduğundan hem T hem de T^* altında sabittir. Önerme 4.1'den $W^{\perp}$ altuzayının da T altında sabit olduğu çıkar. T'nin $W^{\perp}$ altuzayına kısıtlanması normaldir, dolayısıyla tümevarıma göre özvektörlerden ibaret bir $(v_2, \ldots, v_n)$ tabanı vardır. v_1 vektörünü bu tabana ekleyerek V için özvektörlerden ibaret bir taban buluruz. □

Spektral Teorem 4.4 *(matris biçimi) A bir normal matris olsun. PAP^* matrisini köşegenleyen bir P üniter matrisi vardır.* □

Teorem 4.4'ün matris biçimini iki özel çeşit normal matrislere uygulayınca şu sonuçlar elde edilir.

Netice 4.5 *A bir hermisyen matris olsun. PAP^* matrisini gerçel köşegenleyen üniter bir P matrisi vardır.* □

Netice 4.6 *U_n üniter grubunun her eşlenik sınıfı bir köşegen matris içerir.* □

5 Öklid uzayları ve simetrik operatörler

Üzerinde pozitif belirli bir simetrik form verilmiş sonlu-boyutlu gerçel vektör uzaylarına *öklid uzayı* denir.

$(\mathbb{R})^n$ üzerindeki standart simetrik form $(X.Y) = X^tY$ skaler (nokta) çarpımıdır ve $(\mathbb{R})^n$ bu form altında bir öklid uzayıdır. Aksi belirtilmedikçe $\mathbb{R}^n$ uzayına öklid uzayı dediğimizde bu standart formu kastediyoruz demektir.

Bir öklid uzayında genellikle $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ şartını sağlayan $\boldsymbol{B} = (v_1, \ldots v_n)$ *ortonormal tabanlarıyla* çalışılır. Eğer $\boldsymbol{B}$ ortonormalse ve v, w vektörlerinin $\boldsymbol{B}$ tabanına göre koordinat vektörleri X, Y ise,

$$\langle v, w \rangle = X^tY \tag{5.1}$$

olur. Dolayısıyla V, simetrik formuyla birlikte $\mathbb{R}^n$ öklid uzayına izomorftur.

Bir P matrisinin ortogonal olması, yani $P^tP = PP^t$ (veya buna denk $P^t = P^{-1}$) şartını sağlaması için sütunlarının $\mathbb{R}^n$ öklid uzayı için bir ortonormal taban oluşturması gerekir ve yeter.

Lemma 5.2 *Bir $\boldsymbol{B}$ ortonormal tabanı verilsin ve P matrisi $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'P$ taban değişiminin matrisi olsun. O zaman $\boldsymbol{B}'$ tabanının da ortonormal olması için P'nin ortogonal olması gerekir ve yeter.* □

Bir V öklid uzayı üzerinde tanımlanmış T operatörünün herhangi bir ortonormal tabandaki matrisi simetrikse T'ye bir *simetrik operatör* denir. T'nin simetrik olması için

$$\text{her } v, w \in V \text{ için } \langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle$$

şartının sağlanması gerekir ve yeter.

Spektral Teorem 5.3 *T bir V öklid uzayı üzerinde simetrik operatör olsun.*
(i) T'nin özdeğerleri birer gerçel sayıdır.
(ii) V'nin T'nin özvektörlerinden ibaret bir tabanı vardır.

Kanıt. Gerçel simetrik matrisler hermisyen olduğundan (i) kısmı Netice 4.3'den çıkar. (ii) kısmının kanıtı Teorem 4.4'ün ispatı aynen izlenerek yapılır. □

Spektral Teorem 5.4 *(matris biçimi) A bir gerçel simetrik matris olsun. PAP^t matrisini köşegenleyen bir P ortogonal matrisi vardır.* □