18.701 Cebir 1

2007 Güz

Permütasyon Matrisleri

Bir S_n simetrik grubunun her p elemanına ilişik $n \times n$ bir P permütasyon matrisi vardır. Bu matris bir vektörün girdileri üzerinde p permütasyonu gibi etkir.

Örneğin, S_3 grubundaki $p = (123)$ çevriminin matrisi şöyledir:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Bir vektöre P uygulandığında girdileri çevrimsel olarak kayar.

Bir devrinimin (transpozisyon) matrisi ikinci türden elemanter matristir, yani şu 2×2 boyutlu matrisi

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

matrisini $n \times n$ boyutlu birim matrisinin içine yerleştirerek elde edilebilir. Bunu çok kolay gösterebiliriz. Ancak verilen gelişigüzel bir permütasyonun matrisini dikkatle yazarak iki permütasyonun pq çarpımının matrisinin PQ matrisi olduğunu görmek önemlidir. Eğer bir p permütasyonunu devrinimlerin çarpımı olarak işade edip mukabil elemanter matrislerin çarpımını alırsak P matrisini elde ederiz. Peki bu matris hangi matristir?

Matris birimlerini kullanarak P matrisini açık şekilde yazabiliriz. $n \times n$ matris birimi e_{ij} matrisi i, j girdisi 1 olup diğer tüm girdileri sıfır olan matristir. Benzer şekilde e_i simgesi i-inci konumda tek bir 1 bulunan vektörü gösterir. Örneğin, $n = 3$ için,

$$e_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Matris birimleri olan $e_1, \dots, e_n$ vektörleri $\mathbb{R}^n$ uzayının standart tabanını verir; her $X = (x_1, \dots, x_n)^t$ vektörü

$$X = e_1 x_1 + \cdots + e_n x_n \tag{4}$$

bileşimi şeklinde yazılabilir. (skalerlerin vektörlerin sağında yer almasına izin veriyoruz.) Bir $A = (a_{ij})$ matrisi benzer şekilde matris birimlerinin bileşimi şeklinde yazılabilir: $A = \sum_{ij} e_{ij} a_{ij}$.

Matris birimlerini çarpma kuralları şöyle verilir:

$$e_{ij} e_{jl} = e_{il}, \text{ ve } j \neq k \text{ için } e_{ij} e_{kl} = 0, \tag{5}$$

$$e_{ij} e_j = e_i, \text{ ve } j \neq k \text{ için } e_{ij} e_k = 0. \tag{6}$$

Bir $p \in S_n$ permütasyonuna mukabil $n \times n$ matris şöyle yazılır:

$$P = \sum_i e_{pi,i}. \tag{7}$$

(Sade bir gösterim için $p(i)$ yerine pi yazdık.) Böylece (1) matrisi $P = e_{21} + e_{32} + e_{13}$ şeklinde yazılır.

(7) vektörü X vektörü üzerinde şöyle etkir:

$$PX = \left(\sum_i e_{pi,i}\right)\left(\sum_j e_j x_j\right) = \sum_{i,j} e_{pi,i} e_j x_j = \sum_i e_{pi,i} e_i x_i = \sum_i e_{pi} x_i. \tag{8}$$

Bu hesabı (6) formülünü kullanarak yaptık. Çifte toplamdaki $e_{pi,i}e_j$ terimleri $i \neq j$ için sıfırlanır.

(8)'in sağ tarafını bir sütun vektör gibi yazmak için, sağdaki toplamı doğru sıralamalı, yani $e_1, \dots, e_n$ sıralamasına sokacak şekilde yeniden düzenlemeliyiz. $pi = j$ yazarak şunu elde ederiz:

$$\sum_i e_{pi} x_i = \sum_j e_j x_{p^{-1}j}. \tag{9}$$

Örneğin, (1)'deki $P = e_{21} + e_{32} + e_{13}$ matrisini alalım ve $X = e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3$ olsun. O halde

$$PX = e_2x_1 + e_3x_2 + e_1x_3 = e_1x_3 + e_2x_1 + e_3x_2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

P'nin bu tanımının matris çarpımıyla uyumlu olduğunu gösterelim. p, q permütasyonlarının matrisleri P, Q olsun. O halde

$$PX = \left(\sum_i e_{pi,i}\right)\left(\sum_j e_{qj,j}\right) = \sum_{i,j} e_{pi,i} e_{qj,j} = \sum_j e_{pqj,qj} e_{qj,j} \tag{11}$$

olur. Bu heasbı yaparken formül (5)'i kullandık. Çifte toplamdaki $e_{pi,i}e_{qj,j}$ terimleri $i = qj$ değilse sıfırlanır. Umduğumuz üzere PQ'nun gerçekten pq permütasyonunun matrisi olduğunu kaydedelim.

Bir permütasyonun *işareti* o permütasyonun matrisinin determinantı olarak tanımlanır. Bir devrinimin matrisinin determinantı -1 olduğundan ve her permütasyon matrisi bu matrislerin çarpımı şeklinde yazıldığından, det $P = \pm 1$ olur.

Böylelikle $\textit{işaret}(p)\textit{işaret}(q) = \textit{işaret}(pq)$ formülünü de $\det PQ = \det P \det Q$ formülünden çıkarabiliriz.