18.701 Cebir 1

2007 Güz

Permütasyonlar

Bu ders notu çevrim gösterimi ve permütasyonların bileşimi hakkındadır.

Önce, iki küme arasındaki $f : U \to V$ fonksiyonu için kullanılan terminolojiyi hatırlatalım:

- f birebirdir: Her $u_1, u_2 \in U$ için $u_1 \neq u_2$ ise, $f(u_1) \neq f(u_2)$ olur.
- f örtendir: Her $v \in V$ için, $f(u) = v$ biçiminde bir u vardır.
- f birebir-örtendir (eşlemedir): f hem birebir hem örtendir.

Birebir-örten fonksiyonların önemli iki özelliğini sunalım:

Önerme 1 *Bir $f : U \to V$ fonksiyonunun birebir-örtendir olması için, $f \circ g : V \to V$ ve $g \circ f : U \to U$ bileşimlerinin birim fonksiyon olmasını sağlayacak bir $g : U \leftarrow V$ fonksiyonunun bulunması gerekir ve yeter.* □

Önerme 2 *Eleman sayıları aynı iki sonlu küme arasında bir $f : U \to V$ fonksiyonu olsun. Eğer f birebirse aynı zamanda örtendir; örtense aynı zamanda biredirdir.* □

Bir U kümesinden kendine giden birebir-örten fonksiyona U'nun bir *permütasyonu* denir. Mesela

$$\begin{array}{cc|cccccccc} n & : & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \hline p(n) & : & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \end{array} \tag{3}$$

tablosu $U = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{8}\}$ kümesinin p permütasyonunu göstermektedir, dikey yönde $p(\mathbf{1}) = \mathbf{3}$, $p(\mathbf{2}) = \mathbf{6}$ vs. şeklinde okunur.

Bir U kümesinin permütasyonları fonksiyonların bileşkesi altında $\mathrm{Perm}(U)$ ile gösterilen bir grup oluşturur.

$\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$ kümesinin permütasyon grubuna *simetrik grup* denir ve S_n ile gösterilir. Eleman sayısı n olan kümenin $n!$ adet permütasyonu vardır, yani S_n grubunun mertebesi $|S_n| = n!$ eder.

Notun kalan kısmında simetrik grupla çalışırken kullanılan *çevrim gösterimini* açıklayacağız.

$\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{8}\}$ kümesinin bir p permütasyonu olsun. Gelişigüzel bir eleman seçip p altında nereye gittiğini izleyelim: Eğer p yukarıdaki permütasyonsa $p(\mathbf{2}) = \mathbf{6}$, $p(\mathbf{6}) = \mathbf{8}$, $p(\mathbf{8}) = 1$, $p(\mathbf{1}) = \mathbf{3}, \ldots$:

$$\mathbf{2} \to \mathbf{6} \to \mathbf{8} \to \mathbf{1} \to \mathbf{3} \ldots$$

U kümesi sonlu olduğundan bu dizi hiç tekrarlanmadan devam edip gidemez. Örneğin $p(\mathbf{3})$'ün dizide şu ana dek geçen $\mathbf{2}, \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{3}$ elemanlarından biri olduğunu varsayalım. O zaman $p(\mathbf{3}) \neq \mathbf{6}$ olur zira $p(\mathbf{2}) = \mathbf{6}$ ve p birebirdir. Benzer şekilde $p(\mathbf{3}) \neq \mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{3}$ elde edilir. Dolayısıyla $p(\mathbf{3}) = \mathbf{2}$ olur:

$$\mathbf{2} \to \mathbf{6} \to \mathbf{8} \to \mathbf{1} \to \mathbf{3} \to \mathbf{2}$$

Bu diziye bir beşli-çevrim denir ve $(\mathbf{2\,6\,8\,1\,3})$ ile gösterilir.

Bu çevrim (2) ile verilen permütasyonun bir kısmını tasvir eder ancak bu tasviri tamamlamak için kalan $\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{7}$ elemanlarının da çevrimlerini bulmamız gerekir. Bunlar iki çevrim oluşturur: $(\mathbf{4\,5})$ ikili çevrimi ve $(\mathbf{4})$ birli çevrimi. Gösterimden birli çevrimleri çıkarmak adet olmuştur, dolayısıyla

$$P = (\mathbf{2\,6\,8\,1\,3})(\mathbf{4\,5}) \tag{4}$$

yazarız.

Burada her eleman ençok bir kez yer alır, ve eksik eleman olan $\mathbf{7}$, permütasyon tarafından sabitlenmiştir. (bu kabulun müphem kalmaması için çalıştığımız kümeyi baştan bilmeliyiz.)

Çevrim gösteriminin küçük bir kusuru yegane olmamasıdır, mesela öncelikle, çevrime herhangi bir elemandan başlayabiliriz:

$$(\mathbf{2\,6\,8\,1\,3}) = (\mathbf{6\,8\,1\,3\,2}) = (\mathbf{8\,1\,3\,2\,6}) = \cdots, \tag{5}$$

ve ikinci olarak farklı elemanlar içeren çevrimlerin hangi sırayla yazıldıklarının önemi yoktur:

$$(\mathbf{2\,6\,8\,1\,3})(\mathbf{4\,5}) = (\mathbf{4\,5})(\mathbf{2\,6\,8\,1\,3}). \tag{6}$$

Şimdi simetrik grubun grup kanununa, yani fonksiyonların bileşkesine dönelim. Eğer p, q iki permütasyonsa, pq ile $p \circ q$ bileşkesini gösterelim. Dolayısıyla küme elemanlarına ilk uygulanan fonksiyon q, ardından uygulanan q'dur. Ders kitabında Bölüm 6'da bunun zıttı kabul edilerek pq ifadesi "önce p'yi, sonra q'yu uygula" şeklinde okunmuştur. Bu ders notunu hazırlamamın esas sebebi pq ifadesini $p \circ q$, yani "önce q'yu, sonra p'yi uygula" şeklinde okumak istememdir.

Örnek olarak yukarıdaki $p = (\mathbf{2\,6\,8\,1\,3})(\mathbf{4\,5})$ permütasyonunu alalım ve q'yu da şöyle seçelim:

$$q = (\mathbf{2\,4\,7})(\mathbf{1\,6\,8\,5}) \tag{7}$$

Şimdi pq permütasyonunu hesaplamak için, bir küme elemanıyla, mesela $\mathbf{1}$ ile başlayalım. $p(q(\mathbf{1})) = p(\mathbf{6}) = \mathbf{8}$, $p(q(\mathbf{8})) = p(\mathbf{5}) = \mathbf{4}$, vs.

$$pq = p \circ q = (\mathbf{1\,8\,4\,7\,6})(\mathbf{2\,5\,3}). \tag{8}$$

İlk bakışta bu biraz acayip gelebilir, çünkü çevrimi soldan sağa doğru okuyup, sonra da permütasyonlarda sağdan sola doğru giderek çalışmamız gerekiyor. Ancak nihayetinde zor değil. Öte yandan tek bir permütasyonu oluşturan permütasyonların hangi sırayla okunduğu önemli değildir. (bkz. (6)).

Pratikte q'nun çevrim ayrışımını p'ninkinin soluna yazarak hesap yapılabilir:

$$p \circ q = \text{ önce } q(\mathbf{2\,4\,7})(\mathbf{1\,6\,8\,5}) \text{ sonra } p(\mathbf{2\,6\,8\,1\,3})(\mathbf{4\,5}). \tag{9}$$

Artık elemanları soldan sağa izleyebilirsiniz: önce $\mathbf{1} \to \mathbf{6} \to \mathbf{8}$, $\mathbf{8} \to \mathbf{5} \to \mathbf{4}$, $\mathbf{4} \to \mathbf{7} \to \mathbf{7}$, vs.

Alıştırmalar.

1. İkili çevrimlere *devrinim* (transpozisyon) adı verilir. Devrinimlerin S_n simetrik grubunu ürettiğini gösterin.

2. Üçlü çevrimlerin A_n almaşık (alterne) grubunu ürettiğini gösterin.