18.701 Cebir 1

2007 Güz

Dönmeler ve İzometriler

Bu ders notu boyunca ele alacağımız vektör uzaylarının skalerler cismi gerçel sayılardır ve $V = \mathbb{R}^n$ sütun vektörleri uzayını göstermektedir.

1 Skaler çarpım

İki $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ ve $y = (y_1, \ldots, y_n)^t$ sütun vektörünün skaler (nokta) çarpımı şöyle tanımlanır:

$$(x \cdot y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n. \tag{1.1}$$

Skaler çarpımı matris çarpımı şeklinde de yazabiliriz:

$$(x \cdot y) = x^t y \tag{1.2}$$

Skaler çarpımın esas özellikleri şunlardır:

(1.3) $|x|^2 = x^t x$, ve
(1.4) $x \perp y$ (x ve y ortogonaldir) $\Leftrightarrow x^t y = 0$.

Aslında bunlar x vektörünün $|x|$ uzunluğunun ve iki vektörün ortogonalliğinin tanımıdır, bu kavramların anlamlı başka bir tanımı yoktur.

Hem (1.3) hem de (1.4) formülünü içeren daha genel bir formül vardır: Eğer θ ile x ve y arasında gerilen açıyı gösterirsek,

$$x^t y = |x||y| \cos\theta. \tag{1.5}$$

Bu formül açı kavramının anlaşılmasını gerektirir ve bunu yapmak için şimdi zamanımız olmayacak.

Teorem 1.6 *(Pisagor) Eğer $x \perp y$ ve $z = x + y$ ise, $|z|^2 = |x|^2 + |y|^2$.*

Bunu $z^t z$ ifadesini açarak gösterebiliriz:

$$z^t z = (x + y)^t (x + y) = x^t x + x^t y + y^t x + y^t y = x^t x + y^t y.$$

Benzer şekilde eğer $v_1, \ldots, v_n$ ortogonal vektörlerse ve $w = v_1 + \cdots + v_k$ ise,

$$|w|^2 = |v_1|^2 + \cdots + |v_k|^2 \tag{1.7}$$

eşitliği geçerlidir.

Lemma 1.8 *Her $v_1, \ldots, v_n$ ortogonal vektör kümesi doğrusal bağımsızdır.*

Kanıt. Bir $w = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ doğrusal bileşimi olsun, c_i'lerin tümü sıfırlanmasın. $c_i = 0$ terimlerini atalım. Kalan c_iv_i katları sıfırlanmayan ortogonal vektörlerdir, dolayısıyla v_i vektörü yerine c_iv_i alabiliriz. Yine kalan vektörlerin bileşenlerini yeniden adlandırırarak $\ell \geq 1$ olmak üzere $w = v_1 + \cdots + v_\ell$ elde ederiz. Pisagor'dan $|w|^2 = |v_1|^2 + \cdots |v_\ell|^2 > 0$, yani $w \neq 0$ olur. □

Ortogonal birim vektörlerden (birim uzunluktaki vektörlerden) oluşan $\boldsymbol{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ tabana V'nin bir *ortonormal taban* adı verilir. *Kronecker deltası* δ_{ij} kullanarak ortogonal olma şartı şöyle yazılır:

(1.9) $$v_i^t v_j = \delta_{i,j}.$$

(Kronecker deltası δ_{ij}, eğer $i = j$ ise 1, değilse 0 değerini alır. Aynı zamanda birim matrisin i, j girdisidir.)

2 Ortogonal matrisler ve ortogonal operatörler

Bir $n \times n$ gerçel matris, eğer

(2.1) $$A^tA = I$$

şartını sağlıyorsa, *ortogonaldir* denir. Bir başka deyişle A tersinirdir ve tersi A^t matrisidir.

Lemma 2.2 *Bir $n \times n$ matrisin ortogonal olması için sütun vektörlerinin bir ortonormal taban oluşturması gerekir ve yeter.*

Kanıt. A'nın i sütunu v_i olsun. O halde v_i^t vektörü A^t matrisinin i satırı olur. Yani A^tA matrisinin i, j girdisi $v_i^tv_j$ eder. O halde $A^tA = I$ olması için $v_i^tv_j = \delta_{i,j}$ gerekir ve yeter. □

Ortogonal matrislerin şu özellikleri kolayca çıkarılabilir:

(2.3) Ortogonal matrisler GL_n'nin *Ortogonal grup O_n* adı verilen bir altgrubunu verir. Yani ortogonal bir matrisin devriği ve iki ortogonal matrisin çarpımı da ortogonaldir.

(2.4) Ortogonal bir matrisin determinantı ± 1 dir. Determinantı 1 olan ortogonal matrisler O_n içinde indeksi iki olan bir altgrup verir, bu gruba *özel ortogonal grup SO_n* adı verilir.

Doğrusal bir $T : V \to V$ operatörü skaler çarpımı koruyorsa, yani her $x, y \in V$ için

(2.3) $$(Tx \cdot Ty) = (x \cdot y)$$

sağlanıyorsa, T'ye *ortogonal operatör* denir.

Lemma 2.4 *Bir doğrusal operatörün ortogonal olması için matrisinin ortogonal olması gerekir ve yeter.*

($\mathbb{R}^n$ üzerindeki bir doğrusal operatörün matrisinden bahsederken, aksi belirtilmedikçe tabanın $(e_1, \ldots, e_n)$ standart tabanı olduğu varsayılır.)

Altlemma 2.5 *M bir $n \times n$ matris olsun. Eğer her x, y sütun vektörü için $x^t M y = x^t y$ sağlanıyorsa $M = I$ olur.*

Kanıt. $e_i^t M e_j$ ifadesini heaplayalım. Bu M'nin i, j girdisidir. Dahası, $e_i^t e_j = e_i^t I e_j$ birim matrisin i, j girdisidir. Yani her x, y için $x^t M y = x^t y$ sağlanıyorsa M ve I matrislerinin girdileri eşittir. $\square$

Lemma 2.6'nın kanıtı. Eğer T operatörünün standart tabana göre matrisi A ise, $Tx = Ax$ olur ve

$$(Tx \cdot Ty) = (Ax)^t (Ay) = x^t A^t A y.$$

Operatörün ortogonal olması için eşitliğin sağ tarafı her x, y için $x^t y = (x \cdot y)$ değerini almalıdır. Altlemma bunun eğer ve ancak A ortogonalse gerçekleştiğini söyler. $\square$

3 Ortogonal 2×2 matrisler

$\mathbb{R}^2$ düzleminin θ açılık bir dönmesinin, $c = \cos\theta$ ve $s = \sin\theta$ olmak üzere matrisi

$$R = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

olan bir doğrusal operatör olduğunu derste gördük.

Özdeğerleri $+1$, -1 olan iki v_1, v_2 özvektörü bulunan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ doğrusal operatörlerine *yansıma* denir. Böyle bir operatör düzlemi v_1 vektörünün gerdiği bir-boyutlu altuzay boyunca yansıtır ve ortogonal bir operatördür. *Standart yansıma*, matrisi

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

ile verilen e_1-ekseni boyunca yansımadır.

Teorem 3.2 *(i) Determinantı 1 olan 2×2 ortogonal matrisler (3.1) ile verilen dönme matrisleridir.*
(ii) Determinantı -1 olan 2×2 ortogonal matrisler, bir θ için $c = \cos\theta$ ve $s = \sin\theta$ olmak üzere

$$S = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

matrisleridir.

Teorem 3.4 *(3.3) matrisiyle çarpma, düzlemi $\frac{1}{2}$ eğimli 1-boyutlu altuzay boyunca yansıtır.*

Teorem 3.2'nin kanıtı. Ortogonal bir matrisi

$$A = \begin{pmatrix} c & r \\ s & t \end{pmatrix}$$

biçiminde yazalım. A ortogonal olduğundan sütunları birim vektörlerdir. Yani $(c, s)^t$ noktası birim çember üzerinde yer alır ve bir θ açısı için $c = \cos\theta$ ve $s = \sin\theta$ olur.

A'nın R ve S matrislerinden biri olduğunu göstermek istiyoruz. Bu çok zor bir hesap olmasa da, biraz basitleştirmek için bir yöntem var: $P = R^{-1}A$ çarpımına bakalım. Eğer $A = R$ ise P birim matris olmalıdır.

P'nin ilk sütununu hesaplarsak, bir u, v için

$$P = R^t A = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

bulunur. Lemma 2.2'den ortogonal P matrisinin ikinci sütununun birinci sütuna dik bir birim vektör olması gerekir. Öyleyse

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. $A = RP$ olduğundan, $\det A = 1$ ise $A = R$; $\det A = -1$ ise $A = S$ elde ederiz. □

Teorem 3.4'ün kanıtı. S matrisinin karakteristik polinomu $t^2 - 1$ olduğundan özdeğerleri $+1$ ve -1 eder. v_1, v_2 bu özdeğerli özvektörler olsun. O halde S ortogonal bir matris olduğu için,

$$(v_1 \cdot v_2) = (Sv_1 \cdot Sv_2) = (v_1 \cdot -v_2) = -(v_1 \cdot v_2),$$

yani $(v_1 \cdot v_2) = 0$ elde ederiz. Bu da özvektörlerin ortogonalliğini gösterir.

Yansıma doğrusunu bulmak için $c' = \cos\alpha$, $s' = \sin\alpha$ ve $v_1 = (c', s')^t$ diyelim. O halde Sv_1 vektörünün girdileri $cc' + ss' = \cos(\theta - \alpha)$ ve $sc' - cs' = \sin(\theta - \alpha)$ eder. Yani $\alpha = \frac{1}{2}\theta$ ise v_1 özdeğeri 1 olan özvektördür. □

4 $\mathbb{R}^3$ uzayında dönmeler

Üç boyutta dönmeler daha karışıktır. Şu özelliklere sahip bir ρ doğrusal operatörüne $\mathbb{R}^3$ uzayının bir dönmesi denir:

(4.1) ρ operatörü, dönme ekseni denen 1-boyutlu W_1 altuzayı üzerinde birim operatördür ve W_1 altuzayına ortogonal W_2 altuzayı üzerinde bir dönmedir.

Örneğin, eğer W_1 altuzayı e_1 ile geriliyorsa W_2 o zaman e_2, e_3 ile gerilir ve ρ'nun matrisi şu biçimi alır:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

burada sağ alttaki 2×2 matris minörü (3.1) dönme matrisidir. Gelişigüzel bir eksen etrafında dönmeyi tanımak bu kadar kolay olmaz.

Teorem 4.2 *(Euler teoremi) $\mathbb{R}^3$ uzayındaki dönmeleri temsil eden matrisler birim determinantlı ortogonal matrislerdir.*

Birim determinantlı ortogonal matrisler bir grup teşkil ettiğinden Euler'in teoreminin geometrik ve cebirsel olarak bariz olmayan şöyle bir kaydadeğer sonucu vardır:

Netice 4.3 *İki gelişigüzel eksen etrafındaki dönmenin bileşimi bir başka eksen etrafında bir dönmedir.* □

Lemma 4.4 *Ortogonal, birim determinantlı ve 3×3 boyutlu bir A matrisi olsun. O halde 1 sayısı A'nın bir özdeğeridir.*

Kanıt. $\det(A - I) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $\det A^t = 1$ eşitliğini kullanarak

$$\det(A - I) = \det(A^t(A - I)) = \det(I - A)^t = \det(I - A) = -\det(A - I)$$

buluruz (eğer B bir $n \times n$ matrisse, $\det(-B) = (-1)^n \det(B)$ olur.) $\det(A - I) = -\det(A - I)$ bağıntısından $\det(A - I) = 0$ çıkar. □

Euler teoreminin kanıtı. Ortogonal, birim determinantlı ve 3×3 boyutlu bir A matrisi olsun, A ile çarpmayla tanımlanan doğrusal operatör T olsun. Lemma 4.5 bize T'nin birim özdeğerli bir v_1 özvektörü bulunduğunu söylüyor. Bu özvektörü birim uzunlukta seçelim. v_1'in gerdiği W_1 altuzayı A'nın dönme ekseni olacak. (v_1) vektörünü $\mathbb{R}^3$'ün bir ortonormal $\boldsymbol{B} = (v_1, v_2, v_3)$ tabanına genişletelim. (v_2, v_3) tarafından gerilen W_2 uzayı W'e ortogonal olan uzaydır.

T'nin bu yeni tabandaki matrisi $A_1 = P^{-1}AP$ ile verilir; burada $P = [B]$ sütunları v_1, v_2, v_3 olan matrisi göstermektedir. Lemma 2.2'ye göre P bir ortogonal matristir, dolayısıyla $A_1 = P^{-1}AP$ de bir ortogonal matristir. Üstelik A_1'in determinantı birdir.

v_1 birim özdeğerli bir özvektör olduğundan, A_1'in ilk sütunu $(1, 0, 0)^t$ olur. O halde v_1 vektörü aynı zamanda $P^{-1} = P^t$ matrisinin de bir özvektörüdür ve A_1'in üst satırı $(1, 0, 0)$ vektörüdür ve A_1 şu biçimi alır:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Bu matrisin biçiminden T operatörünün W_2 altuzayını kendine gönderdiği görülüyor. T operatörünün W_2 altuzayına kısıtlanmasını T' ile gösterelim. T' operatörünün (v_2, v_3) tabanına göre matrisi A_1 matrisinin sağ alt 2×2 minörüdür. Bu matrise R diyelim. A_1 ortogonal ve birim determinantlı olduğundan, R ortogonal ve birim determinantlı bir 2×2-matris olmalıdır, dolayısıyla (3.1)'deki dönme matrislerinden biri olmalıdır. Bu A_1 matrisinin, dolayısıyla T operatörünün, W_2 üzerinde dönmeyle etkidiğini gösterir. Böylece T operatörünün W_1 ekseni etrafında bir dönme olduğu görülür. □

5 Izometriler

$\mathbb{R}^n$ uzayının bir *izometrisi*, uzaklık-koruyan bir $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gönderimidir, yani her $\mathbb{R}^n$ uzayındaki her u ve v vektörü için

$$|\phi(u) - \phi(v)| = |u - v| \tag{5.1}$$

sağlanır. Gösterimi sadeleştirmek için $\phi(u)$ vektörünü u' ile temsil edeceğiz. Bu kabulle ϕ'nin uzaklık-koruma özelliği şöyle yazılır:

$$|u' - v'| = |u - v| \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n, \text{ veya}$$

$$(u' - v' \cdot u' - v') = (u - v \cdot u - v) \quad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n. \tag{5.2}$$

Ortogonal operatörler birer izometridir. Bir a vektörü ile *öteleme*

$$t_a(x) = x + a \tag{5.3}$$

ile tanımlanır ve bir izometridir. İki izometrinin bileşimi yine bir izometridir.

Teorem 5.4 *$\mathbb{R}^n$ uzayının orijini sabitleyen ($\phi(0) = 0$) izometrisi bir ortogonal doğrusal operatördür.*

Teorem 5.5 *$\mathbb{R}^n$ uzayının her izometrisi bir ortogonal doğrusal operatör ve ötelemenin bileşimidir: eğer $\phi(0) = a$ ise p ortogonal bir operatör olmak üzere $\phi = t_a p$ biçiminde yazılır.*

Teorem 5.4'ün çok temiz kanıtı birkaç sene önce bir 18.701 öğrencisiyken Sharon Hollander tarafından bulunmuştur.

Lemma 5.6 *$\mathbb{R}^n$ uzayında x ve y be vektörleri verilsin. Eğer $(x \cdot x)$, $(x \cdot y)$, $(y \cdot y)$ skaler çarpımları eşitse $x = y$ olur.*

Kanıt. $(x \cdot x) = (x \cdot y) = (y \cdot y)$ varsayalım. $x = y$ eşitliğini göstermek için $x - y$ vektörünün sıfır uzunlukta olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu $|x - y|^2$ ifadesini açarak görebiliriz:

$$((x - y) \cdot (x - y)) = (x \cdot x) - 2(x \cdot y) + (y \cdot y) = 0. \qquad \square$$

Lemma 5.7 *Orijini sabitleyen her ϕ izometrisi skaler çarpımı korur, bir başka deyişle her $u, v \in \mathbb{R}^n$ için şu eşitlik sağlanır:*

$$(u' \cdot v') = (u \cdot v).$$

Kanıt. ϕ izometrisinin orijini sabitlemesi bizim gösterimimizde $0' = 0$ şeklinde yazılır. (5.2)'de $v = 0$ koyarak $(u' \cdot v') = (u \cdot v)$ elde edilir. Benzer şekilde $(v' \cdot v') = (v \cdot v)$ bulunur. Kanıtı tamamlamak için (5.2) ifadesi açılıp $(u \cdot u)$ ve $(v \cdot v)$ çarpımları her iki taraftan da silinir. $\square$

Teorem 5.4'ün kanıtı. Doğrusal olduğunu gösterince m dönüşümünün ortogonal olduğu Lemma 2'den çıkacak. Öyleyse her u, v sütun vektörü ve c gerçel sayısı için $\phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$ ve $\phi(cv) = c\phi(v)$ olduğunu göstereliyiz.

Önce $\phi(u + v) = \phi(u) + \phi(v)$ eşitliğini ispatlayalım. w ile $u + v$ toplamını gösterelim. Üslü gösterimimizi de kullanırsak kanıtlamak istediğimiz bağıntı $w' = u' + v'$ haline gelir.

Lemma 5.6'yı $x = w'$ ve $y = u' + v'$ için uygulayalım. $w' = u' + v'$ eşitliğini göstermek için $(w' \cdot w') = (w' \cdot (u' + v')) = ((u' + v') \cdot (u' + v'))$ eşitliklerini, veya

$$(w' \cdot w') = (w' \cdot u') + (w' \cdot v') = (u' \cdot u') + 2(u' \cdot v') + (v' \cdot v')$$

eşitliklerini göstermek yeterlidir. Lemma 5.7 bu skaler çarpımlardan üsleri kaldırmamıza izin verir. Dolayısıyla

$$(w \cdot w) = (w \cdot u) + (w \cdot v) = (u \cdot u) + 2(u \cdot v) + (v \cdot v)$$

eşitliklerini göstermek yeterlidir. $w' = u' + v'$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz, öte yandan $w = u + v$ eşitliği tanım itibarıyle doğrudur. Yani (5.8) eşitliği w yerine $u + v$ koyarak çıkar.

ϕ operatörünün doğrusallığını göstermek için her $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve her c skaleri için $\phi(cv) = c\phi(v)$ eşitliğini de göstermek gerekir. Bunun kanıtı da benzer: cv yerine w yazarsak, $w' = cv'$ eşitliğini göstermemiz gerekiyor. Bunun için $(w' \cdot w') = (w' \cdot cv') = (cv' \cdot cv')$ eşitliklerini, veya

$$(w' \cdot w') = c(w' \cdot v') = c^2(v' \cdot v')$$

eşitliklerini göstermek yeterlidir. Lemma 5.7 bu skaler çarpımlardan üsleri kaldırmamıza izin verir, elde edilen eşitlikler $w = cv$ olduğu için doğrudur. □

Teorem 5.5'in kanıtı. ϕ bir izometri ve $a = \phi(0)$ olsun. Bir p ortogonal operatörü için $\phi = t_a p$ eşitliğini göstermek istiyoruz. Bu formül $t_{-a}\phi = p$ formülüne denktir ve bu sonuncusu p'yi belirler. Yani $t_{-a}\phi$'nin bir ortogonal doğrusal operatör olduğunu göstermeliyiz. İki izometrinin bileşimi olduğundan, $t_{-a}\phi$ de bir izometridir ve orijini sabitler. Theorem 5.4 ile kanıt tamamlanır. □