18.701 Cebir 1

2007 Güz

SL_2 Grubunun Normal Altgrupları

Bu ders notunda F ile bir cisim; SL_2 ile cismim özel doğrusal grubu ve V ile F^2 sütun vektörleri uzayı gösterilmektedir. Amacımız şu teoremi kanıtlamak:

Teorem 1.1 *En az dört elemanlı bir F cismi olsun. Eğer SL_2 grubunun bir normal altgrubu $A \neq I$ şeklinde bir eleman içerirse, bu altgrup SL_2 grubunun kendisidir.*

$Z = \pm I$ altgrubu SL_2 grubunun merkezidir ve teoremden $PSL_2 = SL_2/Z$ grubunun bir basit grup olduğu sonucu çıkar. Sonlu F cisimlerini için PSL_2 grubunu ele alarak önemli bir basit gruplar sınıfını belirlemiş oluruz. Bir sonlu cismin mertebesi daima bir asal kuvvetidir, ve her $q = p^n$ asal kuvveti için q mertebeli yegane $\mathbb{F}_q$ cismi mevcuttur.

Lemma 1.2 *$F = \mathbb{F}_q$ olsun. SL_2 grubunun mertebesi $|SL_2| = q^3 - q$ olur. Eğer q ikinin bir kuvveti değilse, $|PSL_2| = \frac{1}{2}(q^3 - q)$ olur. Eğer q ikinin bir kuvvetiyse $I = -I$, $PSL_2 = SL_2$ ve $|PSL_2| = (q^3 - q)$ olur.*

Örneğin, $|PSL_2(\mathbb{F}_4| = 4^3 - 4 = 60$ ve $|PSL_2(\mathbb{F}_5)| = \frac{1}{2}(5^3 - 5) = 60$ bulunur. Bu iki grubun biribirine ve A_5 almaşık grubuna izomorf olduğu bilinmektedir.

Abelyen olmayan basit gruplardan en küçük onunun mertebeleri şöyledir:

$$60, 168, 360, 504, 660, 1092, 2448, 2520, 3420, 4080.$$

Almaşık grup A_7'nin mertebesi olan 2520 dışında bu grupların herbiri sonlu bir F cismi için $PSL_2(F)$ grubuna izomorftur. Bir sonraki enküçük abelyen olmayan basit grup $PSL_{\mathbf{3}}(\mathbb{F}_3)$'ün mertebesi 5616'dır. Bazı mertebeler aşağıda sıralanmıştır.

(1.3)

$\|F\|$	4	5	7	9	8	11	13	17	19	16	23
$\|PSL_2\|$	60	60	168	360	504	660	1092	2448	3420	4080	6072

$\|A_n\|$	5	6	7	8
$\|PSL_2\|$	60	360	2520	20160

Bu arada $PSL_2(\mathbb{F}_2)$ grubu S_3 simetrik grubuna ve $PSL_2(\mathbb{F}_3)$ grubu A_4 almaşık grubuna izomorf olup basit değillerdir.

$F = \mathbb{F}_5$ durumunu ayrıca incelememiz gerekecek. İzleyen lemmayı kullanabilmek için bu durumu bir kenara koyalım.

Lemma 1.4 *Mertebesi $2, 3$ veya 5 olmayan bir cisim karesi r^2, $0, 1, -1$ değerini almayan bir r elemanı içerir.*

Kanıt. Karesi $0, 1$ veya -1 olan elemanlar $x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^5 - x$ polinomunun köküdür. Bu polinomun F'de ençok beş kökü bulunur, yani $|F| > 5$ ise istenen r bulunur. Eğer $|F| = 4$ ise $1 = -1$ olduğundan karesi 1 olan tek eleman 1'in kendisidir. Bu durumda F içindeki 0 ve 1'den farklı iki eleman da işimizi görür. $\square$

Teorem 1.1'in kanıtı. SL_2'nun bir $A \neq \pm I$ elemanı verilsin ve N bu elemanı içeren bir normal altgrup olsun. $N = G$ eşitliğini göstermek istiyoruz. N altgrubunun çarpma, ters alma ve SL_2'nin gelişigüzel elemanıyla eşlenik alma işlemleri altında kapalı olduğunu kaydedelim. A'dan bu işlemleri ardarda kullanarak elde edilen her B matrisi N'de kalacaktır. Mesela, her P için $APA^{-1}P^{-1}$ komütatörü N içindedir. Bu işlemlerin herbirini tek bir kez kullanarak elde edilir.

Karesi $r^2 \neq 0, \pm 1$ olacak şekilde bir $r \in F$ seçip $s = r^2$ dersek $s \neq s^{-1}$ olur.

Kanıtın ilk adımı (Lemma 1.5)'de, s özdeğerli bir $B \in N$ matrisi inşa edeceğiz. N normal olduğu için B'nin tüm eşlenik sınıfı N'de olacak. İkinci adımda (Lemma 1.8) bu eşlenik sınıfının N'yi ürettiğini göstereceğiz, böylece $N = SL_2$ elde edeceğiz.

Lemma 1.5 *N'de bir $A \neq \pm I$ matrisi olsun. Yine N'nin bir elemanı olan $B = APA^{-1}P^{-1}$ komütatörünün özdeğerleri s ve s^{-1} olacak şekilde bir $P \in SL_2$ matrisi vardır.*

Özdeğerleri F'de olan matris bulmanın $F = \mathbb{C}$ için kolayken genelde kanıtın en zor kısmı olduğunu açıkla.

Kanıt. Bu kanıt çok şık bir hile kullanıyor. A için özvektör **olmayan** bir v_1 alalım ve $v_2 = Av_1$ diyelim (bkz. Altlemma 1.6). O halde v_1 ve v_2 doğrusal bağımsız olur ve V için bir taban oluşturur. Özvektörleri v_1, v_2 olan ve $Pv_1 = rv_1$ ve $Pv_2 = r^{-1}v_2$ eşitliklerini sağlayan P matrisini alalım (bkz. Altlemma 7). O takdirde

$$Bv_2 = APA^{-1}P^{-1}v_2 = rAPA^{-1}v_2 = rAPv_1 = r^2Av_1 = sv_2$$

elde edilir. Böylece s, B'nin bir özdeğeridir. Öte yandan B birim determinantlıdır ve diğer özdeğeri s^{-1} olur. □

Altlemma 1.6 *Sıfır dışındaki tüm vektörleri özdeğer kabul eden yegane SL_2 elemanları I ve $-I$ matrisleridir.*

Kanıt. e_1 ve e_2 bir M için özvektörse ve $Me_i = \lambda_i e_i$ ise M köşegen girdileri λ_i olan bir köşegen matristir ve $M(e_1 + e_2) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ olur. Eğer $e_1 + e_2$ de özvektörse, $\lambda_1 = \lambda_2$ ve $M = \lambda_1 I$ olmalıdır. Şimdi $M \in SL_2$ ise $det\,(M) = \lambda^2 = 1$ ve nihayet $\lambda = \pm 1$ bulunur □

Altlemma 1.7 *V için $\boldsymbol{B} = (v_1, v_2)$ tabanı verilsin ve $[\boldsymbol{B}]$ matrisinin sütunları v_1 ile v_2 olsun. Köşegen girdileri λ_1 ve λ_2 olan köşegen matrise Λ diyelim. O halde v_i vektörlerini λ_i özdeğerleriyle özvektör kabul eden yegane $P = [\boldsymbol{B}]\Lambda[\boldsymbol{B}]^{-1}$ matrisi vardır. Eğer $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$ ise $P \in SL_2$ olur.* □

Lemma 1.8 *Özdeğerleri s ve s^{-1} olan matrisler SL_2 içinde tek bir eşlenik sınıfı oluşturur. Bu sınıf N'nin bir altkümesidir ve SL_2 grubunu üretir. Dolayısıyla $N = SL_2$ olur.*

Kanıt. Eğer Q, özdeğerleri s ve s^{-1} olan herhangi bir matrisse, bu özdeğerlere sahip bir $\boldsymbol{B} = (v_1, v_2)$ özvektör çifti V uzayı için bir taban oluşturur. Gerekirse v_1 bir skalerle çarpılarak $det\,[\boldsymbol{B}] = 1$, yani $[\boldsymbol{B}] \in SL_2$ sağlanır. Köşegen girdileri s ve s^{-1} olan S köşegen matrisi de SL_2 elemanıdır. Altlemma 1.7'den $Q = [\boldsymbol{B}]S[\boldsymbol{B}]^{-1}$ olur, yani Q ve S aynı eşlenik sınıfı $\mathcal{C}$ içindedir. Bilhassa Lemma 1.5'deki B komütatörü $\mathcal{C}$ içindedir ve N'nin elemanıdır. N bir normal altgrup olduğundan, $\mathcal{C} \subset N$ elde edilir.

SL_2 içinde eşlenik sınıfı $\mathcal{C}$ tarafından üretilen altgrubu H ile belirtelim. Her $x \in F$ için,

$$\begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & sx \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

eşitliğinin sol tarafındaki matrisler $\mathcal{C}$ içindedir, yani $E \in H$ olur. Keza E^t matrisleri de H içindedir. İzleyen lemmadan $H = SL_2$ çıkar. □

Lemma 1.9 *Tüm $x \in F$ değerleri için E ve E^t biçimindeki elemanter matrisler SL_2 grubunu üretir.*

Kanıt. Bu matrisler SL_2 içindedir. SL_2'yi ürettiklerini ispatlamak için her $M \in SL_2$ elemanının, bu elemanter matrislerin tanımladığı satır işlemleriyle birim matrise indirgendiğini gösterelim. Yani $E_k \cdots E_2 E_1 M = I$ olacak şekilde her biri E ya da E^t türünde olan $E_1, \ldots, E_k$ elemanter matrislerinin bulunduğunu gösterelim. O halde $M = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ olur. M matrisinin şu biçimde olduğunu varsayalım:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

E ile çarpma $(satır1)$'e $x.(satır2)$ eklerken E^t ile çarpma $(satır2)$'ye $x.(satır1)$ ekler. Önce M'nin c girdisinin sıfır olmadığından emin olalım. Eğer $c = 0$ ise, $a \neq 0$ olur ve $(satır1)$'i $(satır2)$'ye ekleyerek yeni bir matris elde ederiz. Böylece M, c konumundaki girdisi sıfır olmayan bir matrise dönüşür. Bundan sonra şu satır işlemlerini yapalım:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{E} \begin{pmatrix} 1 & b' \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{E^t} \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Yukarıdaki üçüncü ve dördüncü matrislerin eşitliğinin sebebi $det\,M = 1$ şartıdır. Satır işlemleri determinantı korur, yani üçüncü matrisin d' girdisi 1 olmalıdır. □