18.701 Cebir 1
2007 Güz

Simetrik Formlar

Bu ders notu boyunca V bir gerçel vektör uzayı ve $\langle\,,\rangle$ bu uzay üzerinde tanımlanmış bir simetrik (bilineer) form olsun. Biraz terminoloji:

ortogonal vektörler: Eğer $\langle v, w\rangle = 0$ ise $v \perp w$ denir.

ortogonal uzay: $W^{\perp} = \{x \in V \mid w \perp x, \text{ her}\, w \in W\}$.

ortogonal taban: $(v_1, \cdots v_n)$: $\langle v_i, w_j\rangle = 0 \ \ \forall i \neq j$.

bozulmamış (dejenere olmayan) form: Her $0 \neq v \in V$ vektörü için $\langle v, v'\rangle \neq 0$ olacak şekilde bir $v' \in V$ vardır.

Bir tabanın ortogonal olması için simetrik formun o tabana göre matrisinin köşegen olması gerekir ve yeter.
Bir formun bozuk olmaması için herhangi bir tabana göre matrisinin tersinir olması gerekir ve yeter.
Form bozuk değil ve taban ortogonalse her $i = 1, \dots n$ için $\langle v_i, w_i\rangle = 0$ olur.

1 Uzayı bir altuzaya ve onun ortogonal uzayına ayrıştırma.

$W \subset V$ bir altuzay olsun. V üzerindeki $\langle\ ,\ \rangle$ form W üzerine kısıtlanarak bir form tanımlar. Form W üzerinde bozuk değildir demekten kastımız W üzerinde kısıtlanarak tanımlanan bu formun bozuk olmadığıdır. Yani $0 \neq w \in W$ için, $\langle w, w'\rangle \neq 0$ olacak şekilde **yine W altuzayının öğesi olan** bir w' bulunur. Bir başka deyişle $0 \neq w \in W$ vektörü $W^{\perp}$ ortogonal uzayında değildir:

Lemma 1.1 *Bir V vektör uzayı üzerinde $\langle\,,\rangle$ simetrik formu verilsin. Bu formun W altuzayında bozulmaması için $W \cap W^{\perp} = 0$ eşitliğinin sağlanması gerekir ve yeter.*

Teorem 1.2 *$W \subset V$ bir altuzay olsun ve form W üzerinde bozuk olmasın. O zaman V uzayı $W \oplus W^{\perp}$ dolaysız toplamına eşittir.*

Kanıt. $W \cap W^{\perp} = 0$ ve $V = W + W^{\perp}$ şartlarının sağlandığını göstermeliyiz. İlk şart basitçe formun W üzerinde bozuk olmamasının yeni bir ifadesidir, ancak ikinci şart bariz değil. Her $v \in V$ vektörünün $w \in W$ ve $u \in W^{\perp}$ olmak üzere $v = w + u$ toplamı şeklinde yazıldığını göstermemiz gerekiyor. $W \cap W^{\perp} = 0$ olduğu için, eğer mevcutsa bu yazım tektir.

W için bir $(w_1, ..., w_k)$ tabanı alalım ve bu tabanı V'nin bir $\boldsymbol{B} = (w_1, ..., w_k, v_1, ..., v_{n-k})$ tabanına genişletelim. Formun bu tabana göre matrisi $M_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ ile tanımlanan M matrisidir. Bu matrisi A, üst-sol $k \times k$ altmatris olacak şekilde, blok biçiminde yazalım:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

(A için koyduğumuz kısıt diğer blokların boyutunu da belirler.) Formun simetrisinden $M^t = M$, dolayısıyla $A^t = A$, $D^t = D$ ve $B^t = C$ elde edilir. B, C, D blokları hakkında başka bilgi edinemiyoruz.

A'nın girdileri $i = 1, ..., k$ için $\langle w_i, w_j \rangle$ sayılarıdır. Yani A matrisi W'daki formun matrisidir. Bu kısıtlanmış form bozulmadığından, A tersinir bir matristir.

B blokunun girdileri $i = 1, \dots, k$ ve $j = 1, \dots, n-k$ için $\langle w_i, w_j \rangle = 0$ ile verilir. Eğer $v_1, \dots, v_{n-k}$ vektörlerini $B = 0$ olacak şekilde seçebilirsek, bu vektörler w_j vektörlerinin tümüne ortogonal olur, dolayısıyla $W^{\perp}$ ortogonal uzayına ait olurlar. V uzayı için $\boldsymbol{B} = (w_1, ..., w_k, v_1, ..., v_{n-k})$ bir taban olduğundan buradan $V = W + W^{\perp}$ çıkar–ki bu da göstermek istediğimiz şeydir.

$B = 0$ elde etmek için $\boldsymbol{B}$ tabanını, ilk k vektör aynı kalacak şekilde değiştirelim. Yeni tabanı $\boldsymbol{B}' = (w_1, ..., w_k; v_1', ..., v_{n-k}')$ ile gösterelim ve $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'P$ diyelim. O halde taban değişiminin matrisi P blok biçimindedir:

$$Q = \begin{pmatrix} I_k & Q \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Burada Q blokunu belirlemek istiyoruz. Formun yeni tabandaki matrisini hesaplamak için,

$$C = \begin{pmatrix} I & -Q \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ ve } (P^{-1})^t = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -Q^t & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

eşitliklerini kullanarak

$$M' = (P^{-1})^t MV = \begin{pmatrix} A & -AQ + B \\ * & * \end{pmatrix}$$

elde ederiz (diğer girdileri bilmemiz gerekmiyor). Şimdi $Q = A^{-1}B$ dersek M' matrisinin sağ üst bloku arzu edildiği gibi sıfırlanır. Yani $V = W + W^{\perp}$ olur. □

Yeri gelmişken, form simetrik olduğundan, M de simetriktir. Blok ayrışımında $A = A^t$, $D = D^t$ ve $C = B^t$ olur. Eğer $B = 0$ ise $C = 0$ olur.

2 Ortogonal tabanlar.

V'nin bir $(v_1, ..., v_n)$ tabanı olsun. Her $i \neq j$ için $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ sağlanıyorsa bu tabana (verilen forma göre) bir *ortogonal taban* denir. Bu formun M matrisinin köşegen olması anlamına gelir.

Teorem 2.1 *V uzayının bir orogonal tabanı vardır.*

Kanıt. Uzayın boyutu $n = dim\, V$ üzerinde tümevarım uygulayalım. V uzayının her $< n$ boyutlu altuzayının ortogonal tabanı olduğunu varsayabiliriz.

Durum 1: Form heryerde sıfırlanır. Bu durumda her taban ortogonaldir.

Durum 2: Form heryerde sıfırlanmaz.

Lemma 2.2 *Bir simetrik form heryerde sıfırlanmıyorsa, $\langle x, x \rangle \neq 0$ olacak şekilde bir $x \in V$ vektörü mevcuttur.*

Kanıt. Form heryerde sıfır olmadığına göre $\langle u, v\rangle \neq 0$ olacak şekilde iki u, v vektörü vardır. $\langle u+v, u+v\rangle$ çarpımını dağıtırsak

$$\langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle$$

elde ederiz. Burada $2\langle u, v\rangle$ terimi sıfırlanmadığına göre kalan terimlerden enaz biri sıfır değildir.

(Bu kanıt $\mathbb{F}_2$ gibi $2 = 0$ eşitliğinin geçerli olduğu cisimler üzerinde tanımlanmış vektör uzayları için çalışmaz, aslında Lemma'nın iddiası bu vektör uzayları için yanlıştır.)

Lemma'yı uygulayarak tabanımızın ilk vektörü olarak $\langle v_1, v_1\rangle \neq 0$ olacak şekilde bir v_1 seçelim. v_1 vektörünün gerdiği 1-boyutlu W uzayı için (v_1) bir ortogonal tabandır ve $\langle v_1, v_1\rangle \neq 0$ olduğundan form W üzerinde bozuk değildir. Teorem 1'den $V = W \oplus W^\perp$ yazılır ve $dim\, W^\perp = n-1$ eder. Tümevarım varsayımına göre $W^\perp$ için bir ortogonal taban vardır. Bu taban $(v_2, ..., v_n)$, olsun. W için bulduğumuz (v_1) tabanıyla birleştirerek V için $(v_1, ..., v_n)$ ortogonal tabanını elde ederiz. □

Alıştırma. Bir 2×2 matris için bu taban değişimini ayrıntılarıyla yapın ve buradan pozitif belirlilik için bir ölçüt elde edin.

3 Ortogonal izdüşüm

Formumuzun V uzayının W altuzayı üzerinde bozulmadığını varsayalım. Teorem 1'den her vektörün $w \in W$ ve $u \in W^\perp$ olmak üzere $v = w + u$ biçiminde yegane ayrışımı bulunduğu çıkar. Yani $\pi(v) = w$ ile tanımlanan gönderim iyi tanımlıdır. Bu gönderime V'den W'ye *ortogonal izdüşüm* adı verilir. Ortogonal izdüşüm şu iki noktayı sağlayan yegane $\pi : V \to W$ doğrusal gönderimidir:

- Eğer $v \in W$ ise $\pi(v) = v$.
- Eğer $v \in W^\perp$ ise $\pi(v) = 0$.

Formun W altuzayına kısıtlanması bozuksa, bir $0 \neq y \in W \cap W^\perp$ vektörü mevcuttur. Aynı anda hem $\pi(y) = 0$ hem de $\pi(y) = y \neq 0$ olamadığından bu durumda ortogonal izdüşüm var olamaz.

İzleyen teorem ortogonal izdüşüm için çok önemli bir formül sunar.

Teorem 3.1 *Verilen simetrik formun V uzayının W altuzayı üzerinde bozulmadığını varsayalım ve W için bir $(w_1, ..., w_k)$ ortogonal tabanını alalım. O halde $\pi : V \longrightarrow W$ ortogonal izdüşümü*

$$c_i = \frac{\langle w_i, v\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle}$$

olmak üzere $\pi(v) = c_1 w_1 + \cdots c_k w_k$ formülü ile verilir

Kanıt. Form W üzerinde bozulmadığı için $\langle w_i, w_i\rangle \neq 0$ olur ve formül anlamlıdır. $\langle w_i, v\rangle$ çarpımı v'nin doğrusal fonksiyonu olduğundan formül doğrusal bir gönderim tanımlar. Eğer $v \in W^\perp$ ise $i = 1, \ldots, k$ için $\langle w_i, v\rangle = 0$ ettiğinden $\pi(v) = 0$ olur.

İkinci noktayı doğrulamış olduk. İlk noktayı doğrulamak için bir $v \in W$ vektörünü taban cinsinden yazalım: $v = a_1 w_1 + \cdots a_k w_k$. Şimdi w_i vektörleri aralarında ortogonal olduğundan,

$$\langle w_j, v\rangle = a_1\langle w_1, w_j\rangle + \cdots + a_j\langle w_j, w_j\rangle + \cdots + a_k\langle w_k, w_j\rangle = a_j\langle w_j, w_j\rangle.$$

Böylece $a_j = c_j$ olur ve $\pi(v) = v$ bulunur. □

Netice 3.2 *V üzerinde bozuk olmayan bir form olsun ve V için bu taban göre bir $(v_1, ..., v_n)$ ortogonal tabanı verilsin. Her $v \in V$ vektörü*

$$x_i = \frac{\langle w_i, v\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle}$$

olmak üzere $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$ şeklinde yazılır.

Kanıt. Bu $W = V$ durumudur. İlk nokta π izdüşümünün birim gönderim olduğunu göstermektedir. □

4 Bir ortogonal tabandaki vektörleri normalleme

V için bir $(v_1, ..., v_n)$ ortogonal tabanı verildiyse v_i vektörlerinin boyu, $\langle v_i, v_i\rangle$ çarpımı sadece 0 ve 1 değeri alacak şekilde ayarlanabilir. Dolayısıyla yeni tabanda formun matrisinin köşegeni 0 ve 1'lerden oluşur. İzleyen teoremin kanıtını vermeyeceğiz.

Sylvester Kanunu 4.1. *Yukarıdaki gibi bir taban verildiğinde, a, e, s harfleriyle formun M matrisinin köşegeni üzerindeki +1, -1 ve 0'ların sayısını gösterelim, öyle ki $a + e + s$ toplamı V uzayının boyutuna eşit olsun. Bu a, e, s sayıları seçilen tabandan bağımsızdır.* □

Not 4.2. Eğer $\langle w_i, w_j\rangle = \pm 1$ ise izdüşüm formülü çok daha basitleşir. Ancak uzunlukları normallemek karekök almayı gerektirir. Bu nedenle normalleme her zaman iyi bir fikir olmayabilir.