18.702 Cebir II

2008 Bahar

Diklik Bağıntıları

1. Bağıntıların İfadesi

$\rho : G \to GL(V)$ ve $\sigma : G \to GL(W)$, sonlu bir G grubunun V ve W karmaşık vektör uzayları üzerinde temsilleri olsun ve χ ile χ' sırasıyla ρ ile σ nın karakterleri olsun. Burada kanıtlayacağımız diklik bağıntıları şunları söyler. Eğer ρ ve σ indirgenemez ise ve izomorf değillerse,

$$\langle \chi', \chi \rangle = 0, \tag{1.1a}$$

ve eğer ρ indirgenemez ise,

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1 \tag{1.1b}$$

dir.

2. İzdüşüm Operatörleri

Bir V vektör uzayı üzerindeki bir doğrusal operatör f için, $f^2 = f$ eşitliği sağlanıyorsa, f bir *izdüşüm operatörü* olarak adlandırılır. Bunu söylemenin diğer bir yolu da şudur: Eğer f operatörü, görüntüsü üzerinde birim fonksiyonu gibi davranıyorsa, bir izdüşüm operatörüdür. (Burada, daha sınırlayıcı bir kavram olan dik izdüşümden bahsetmiyoruz.)

Lemma 2.1. *(a) K ve U, bir V vektör uzayı üzerindeki f izdüşüm operatörünün çekirdeği ve görüntüsü olsun. Bu takdirde, V vektör uzayı, $U \oplus K$ dolaysız toplamıdır.*
(b) Bir f izdüşüm operatörünün izi görüntü U nun boyutuna eşittir.

Kanıt. (a) f nin bir izdüşüm operatörü olduğunu varsayalım. $U + K = V$ ve $U \cap K = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $v \in V$, $u = f(v)$ ve $x = v - u$ olsun. O zaman,

$$f(x) = f(v) - f^2(v) = 0,$$

ve bu nedenle $x \in K$ dir. $u+x = v$ olduğundan ve v rasgele seçilmiş olduğundan, $U + K = V$ dir. Daha sonra, eğer $z \in U \cap K$ ise, $z \in U$ olduğundan $f(z) = z$ ve ve $z \in K$ olduğundan $f(z) = 0$ elde ederiz. Dolayısıyla, $z = 0$ dır. Bu, $K \cap U = 0$ olduğunu gösterir.

(b) f izdüşüm operatörünün izini belirlemek için, U ve K nin tabanlarını birleştirerek V için bir taban seçeriz. f nin bu tabana göre matrisi aşağıdaki blok biçimine sahip olur

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ve burada I nın satır sayısı dim U ya eşittir. $\square$

3. G-değişmez dönüşümler

$\rho : G \to GL(V)$ ve $\sigma : G \to GL(W)$, daha önce olduğu gibi temsiller olsun. Her $g \in G$ ve $v \in V$ için,

$$T(gv) = gT(v) \tag{3.1}$$

koşulunu sağlayan bir $T : V \to W$ doğrusal dönüşümü G-*değişmez*dir. g nin sol tarafta ρ, buna karşılık sağ tarafta σ aracılığıyla etki ettiğini dikkate alınız. G-değişmezlik, bir doğrusal dönüşüm üzerinde çok güçlü bir sınırlandırmadır.

Schur Lemması 3.2. *(a) $\rho : G \to GL(V)$ ve $\sigma : G \to GL(W)$ indirgenemez temsiller olsun, ve $T : V \to W$ G-değişmez bir doğrusal dönüşüm olsun. Bu durumda ya T bir izomorfizmdir ya da $T = 0$ dır.*
(b) $\rho : G \to GL(V)$ bir indirgenemez temsil, ve $T : V \to V$ G-değişmez bir doğrusal dönüşüm olsun. Bu durumda T bir skaler ile çarpımdır: $T = cI$.

Altlemma 3.3. *T G-değişmez bir doğrusal dönüşüm olsun. T nin çekirdeği V nin G-değişmez altuzayıdır ve T nin görüntüsü W nun G-değişmez altuzayıdır.*

Kanıt. v T nin çekirdeğinde ve g G deyse, gv nin de çekirdekte olduğunu göstermeliyiz. Bu doğrudur çünkü $T(gv) = gT(v) = g0 = 0$. Daha sonra, eğer w T nin görüntüsündeyse, gw elemanının da görüntüde olduğunu göstermeliyiz. w T nin görüntüsünde demek V de $T(v) = w$ koşulunu sağlayan bir v var demektir. O zaman, $gw = gT(v) = T(gv)$ dir. Bu nedenle, gw elemanı da görüntüdedir.

Schur Lemmasının Kanıtı. (a) $T \neq 0$ olduğunu varsayalım. ρ indirgenemez ve T nin çekirdeği indirgenemez altuzay olduğundan, çekirdek ya $\{0\}$ ya da V dir. $T \neq 0$ olduğundan V olamaz ve bu nedenle çekirdek $\{0\}$ dir. Daha sonra, σ indirgenemez olduğundan ve görüntü değişmez olduğundan, görüntü $\{0\}$ ya da W dur. $T \neq 0$ olduğundan $\{0\}$ olamaz. Bu durumda, görüntü W olur. Dolayısıyla, T izomorfizmdir.

(b) T doğrusal operatörü, λ özdeğerine sahiptir. Bu, $T - \lambda I$ nın çekirdeğinin $\{0\}$ olmadığı anlamına gelir. Fakat, $T - \lambda I$ operatörü aynı zamanda G-değişmezdir. Bu nedenle, çekirdeği V ye eşittir. Bu $T - \lambda I = 0$ olduğunu, dolayısıyla $T = \lambda I$ olduğunu gösterir. $\square$

G-değişmez T dönüşümünün tanımına geri dönelim. (3.1) bağıntısını temsilleri açıkça ifade ederek yazarsak, $T\rho_g(v) = \sigma_g T(v)$ veya

$$\sigma_g^{-1} T \rho_g = T \tag{3.4}$$

olur. Aşağıdaki diyagram rasgele bir T operatörü ile $\sigma_g^{-1}T\rho_g$ operatörü arasındaki ilişkiyi gösterir:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sigma_g^{-1}T\rho_g} & W \\ \rho\big\downarrow & & \big\downarrow\sigma \\ V & \xrightarrow{T} & W \end{array} \tag{3.5}$$

T doğrusal dönüşümü G-değişmez değilse, en az bir g için $\sigma_g^{-1}T\rho_g \neq T$ olur. Ancak, herhangi bir T doğrusal dönüşümünden, ortalama alarak bir G-değişmez dönüşüm yaratabiliriz. Yeni dönüşümü

$$\widetilde{T} = \tfrac{1}{|G|}\textstyle\sum_g \sigma_g^{-1}T\rho_g \tag{3.6}$$

biçiminde tanımlayalım. $\widetilde{T}$ dönüşümünün G-değişmez olduğunu gösterelim. Tanımdaki toplamın indeksi g olduğundan, değişmezliği G deki h için $\sigma_h^{-1}\widetilde{T}\rho_h = \widetilde{T}$ biçiminde yazarız. $g' = gh$ diyelim ve $Gh = G$ olduğunu belirtelim. g, G deki tüm elemanları bir kez aldığında, g' de G deki tüm elemanları bir kez almış olur. Bu nedenle,

$$\sigma_h^{-1}\widetilde{T}\rho_h == \tfrac{1}{|G|}\textstyle\sum_g \sigma_h^{-1}\sigma_g^{-1}T\rho_g\rho_h = \tfrac{1}{|G|}\textstyle\sum_{g'} \sigma_{g'}^{-1}T\rho_{g'} \tag{3.7}$$

elde ederiz. Elbette, $\widetilde{T}$ dönüşümünün sıfırdan farklı olacağının garantisi yoktur. Aslında, Schur Lemması, ρ ve σ izomorf olmayan indigenemez temsillerse, dönüşümün sıfır olması gerektiğini söyler.

4. G-değişmez matrisler

$R : G \to GL_n$ ve $S : G \to GL_m$ matris temsilleri olsun. $m \times n$ lik bir M matrisi, her $g \in G$ için

$$M = S_g^{-1}MR_g \tag{4.1}$$

eşitliğini sağlıyorsa, M matrisi G-değişmezdir.

Ortalama alma işlemi, herhangi bir matristen bir G-değişmez matris üretecektir:

$$\widetilde{M} = \tfrac{1}{|G|}S_g^{-1}MR_g \tag{4.2}$$

matrisi G-değişmezdir. Kanıt, (3.7) dekinin bir benzeridir.

ρ ve σ temsillerinin ve V ile W nun tabanlarının verildiğini varsayalım. R ve S, bu tabanlar kullanılarak ρ ve σ dan elde edilmiş matris temsilleri olsun ve M T nin matrisi olsun. Bu durumda, T nin G-değişmez olması için gerek ve yeter koşul M nin G-değişmez olmasıdır. Ayrıca, eğer M T nin matrisi ise, $\widetilde{M}$ $\widetilde{T}$ dönüşümünün matrisi olacaktır.

Lemma 4.3. *R ile S yukarıdaki gibi olsun ve Φ operatörü $m \times n$ lik matrislerin uzayı $\mathbb{C}^{m\times n}$ üzerinde $\Phi(M) = \widetilde{M}$ olarak tanımlansın.*
(a) Φ bir izdüşüm operatörüdür ve görüntüsü G-değişmez matrislerin uzayıdır.
(b) R ve S, seçilmiş tabanlara göre ρ ve σ temsillerine bağlı matris temsilleri olsun. ρ ve σ izomorf olmayan indirgenemez temsillerse, iz $\Phi = 0$ *dır. ρ indirgenemez ise, $\rho = \sigma$ ve $R = S$, o halde* iz $\Phi = 1$ *dir.*

Kanıt. (a) (4.2) tanımından, Φ matris toplamı ve skaler çarpım ile uyumludur, bu nedenle doğrusal bir operatördür. Dahası, $\Phi(\widetilde{M}) = \widetilde{M}$, dolayısıyla $\Phi^2 = \Phi$ dir. Φ nin görüntüsü G-değişmez matrislerin uzayıdır.

(b) Lemma 2.1'e göre, Φ nin izi, G-değişmez operatörlerin uzayının boyutuna eşittir. Schur Lemması'na göre, ρ ve σ izomorf olmayan indirgenemez temsillerse, tek değişmez operatör 0 dır. Dolayısıyla, bu durumda Φ nin izi 0 dır. Ayrıca, Schur Lemması, $\rho = \sigma$ ve ρ indirgenemezse, G-değişmez doğrusal operatörlerin uzayının boyutunun 1 olduğunu da söyler. Bu durumda, iz 1 dir. □

5. Diklik bağıntılarının kanıtı

R ve S, seçilmiş tabanlara göre ρ ve σ temsillerine karşılık gelen matris temsilleri olsun. Daha önce olduğu gibi, ρ ile σ nın karakterlerini sırasıyla χ ve χ' ile gösterelim. Bu durumda, elimizde Lemma 4.3'de tanımlandığı biçimiyle operatör Φ vardır. Planımız, diklik bağıntılarını, Φ nin izini yeniden yorumlayarak kanıtlamak. Öncelikle,

$$\text{iz } \Phi = \langle \chi, \chi' \rangle = \tfrac{1}{|G|}\overline{\chi'(g)}\chi(g) \tag{5.1}$$

olduğunu göstereceğiz ve bunu yaptığımızda, (1.1a,b) diklik bağıntıları, Lemma 4.3b'den elde edilecek.

Doğrusal operatör Φ,

$$\varphi_g(M) = S_g^{-1} M R_g \tag{5.2}$$

biçiminde tanımlanmış φ_g operatörlerinin ortalamasıdır:

$$\Phi = \tfrac{1}{|G|}\textstyle\sum_g \varphi_g. \tag{5.3}$$

İz, doğrusal bir fonksiyon olduğundan

$$\text{iz } \Phi = \tfrac{1}{|G|}\textstyle\sum_g \text{iz } \varphi_g \tag{5.4}$$

elde ederiz.

(5.1) eşitliğini

$$\text{iz } \varphi_g = \overline{\chi'(g)}\chi(g) \tag{5.5}$$

eşitliğini göstererek kanıtlayacağız. Bu, önümüzdeki iki lemma ile gerçekleştirilebilir:

Lemma 5.6. *χ', sonlu bir G grubunun $\sigma : G \to GL(W)$ temsilinin karakteri ve S_g, σ_g nin W vektör uzayının bir tabanına göre matrisi olsun. Bu durumda $\overline{\chi'(g)} = \chi'(g^{-1})$ olur.*

Lemma 5.7. *A ve B $m\times m$ lik ve $n\times n$ lik karmaşık matrisler ve f $m\times n$ lik karmaşık matrislerin uzayı $\mathbb{C}^{m\times n}$ üzerinde $f(M) = ABM$ biçiminde tanımlanmış doğrusal operatör olsun. Bu takdirde, f nin izi, (iz A)(iz B) çarpımıdır.*

Lemmaların doğru olduğunu varsayalım. Tanımdan $\chi(g) = \text{iz } R_g$ ve $\chi'(g) = \text{iz } S_g$ dir. Dahası, $S : G \to GL_m$ bir homomorfizm olduğundan $S_g^{-1} = S_{g^{-1}}$ dir. Lemma 5.6, $\overline{\chi'(g)} = \chi'(g^{-1}) = \text{iz } S_g^{-1}$ olduğunu söyler. Lemma 5.7'yi uygularsak,

$$\text{iz } \varphi_g = (\text{iz } S_{g^{-1}})(\text{iz } R_g) = \overline{\chi'(g)}\chi(g) \tag{5.8}$$

elde ederiz. Daha sonra

$$\text{iz } \Phi = \tfrac{1}{|G|} \textstyle\sum_g \text{iz } \varphi_g = \tfrac{1}{|G|} \textstyle\sum_g \overline{\chi'(g)}\chi(g) = \langle \chi', \chi \rangle \tag{5.9}$$

olur. Dolayısıyla, lemmalar kanıtlandığında, diklik bağıntıları da kanıtlanmış olacaktır.

Lemma 5.6'nın Kanıtı. Tanımdan $\chi'(g)$, σ_g nin veya S_g nin özdeğerlerinin toplamıdır. Diyelim, $\chi'(g) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ olsun. $S_{g^{-1}}$ in özdeğerleri λ_i^{-1} elemanlarıdır. g sonlu bir grubun elemanı olduğundan mertebesi de sonludur. Dolayısıyla, S_g, mertebesi sonlu olan bir matristir, bir başka deyişle $r > 0$ olmak üzere $(S_g)^r = I$ dır. O halde, her i için $(\lambda_i)^r = 1$ dir. Bu λ_i lerin mutlak değeri 1 olan karmaşık sayılar olmasını gerektirir. λ mutlak değeri 1 olan bir karmaşık sayı ise, $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$ olur. Dolayısıyla, $\chi'(g^{-1}) = \lambda_1^{-1} + \cdots + \lambda_m^{-1} = \overline{\lambda_1} + \cdots + \overline{\lambda_m} = \overline{\chi'(g)}$ elde edilir. □

Lemma 5.7'nin Kanıtı. Göstermek istiyoruz ki, herhangi $m \times m$ lik A ve $n \times n$ lik B matrisleri için $\mathbb{C}^{m\times n}$ üzerindeki $f(M) = AMB$ operatörünün izi (iz A)(iz B) çarpımına eşittir. $m \times n$ lik matrislerin e_{ij} standart taban elemanları istenildiği gibi sıralanarak f nin matrisi yazılabilir. Bu sıkıcı ve gösterim olarak kafa karıştırıcıdır.

f operatörü A matrisine doğrusal olarak bağımlıdır. Bununla kastettiğimiz, $A = A_1 + A_2$ ise $f = f_1 + f_2$ ve $A = cA'$ ise $f = cf'$ olduğudur. İz fonksiyonu doğrusal olduğundan, f nin izi de doğrusaldır: iz f = iz f_1+ iz f_2 ve iz $f = c$ iz f' dür. Herhangi bir A matrisi $m \times m$ lik standart taban matrislerinin doğrusal bileşimi olarak $\sum a_{ij}e_{ij}$ biçiminde yazılabildiğinden, lemmayı A nın kendisinin bir standart taban matrisi olduğu durumda kanıtlamak yeterlidir. Benzer biçimde, B nin de $n \times n$ lik bir standart taban matrisi olduğunu varsayabiliriz.

$f^2(M) = A^2MB^2$ olduğunu belirtelim.

Üç durumu ayırt edip değerlendireceğiz.

Durum 1: $A = e_{ii}$ ve $B = e_{jj}$ olsun. O halde, $f(M) = e_{ii}Me_{jj} = m_{ij}e_{ij}$ ve $f^2 = f$ dir. Burada, f bir izdüşüm operatörüdür ve operatörün görüntüsü, e_{ij} tarafından gerilen bir boyutlu uzaydır. Bu nedenle, iz $f = 1$ dir. Ayrıca, (iz A)(iz B) $= 1 \cdot 1 = 1$ dir. Böylece, lemma bu durumda kanıtlanmış olur.

Durum 2: $A = e_{ik}$ ve $i \neq k$ dir. Bu durumda, $A^2 = 0$ ve bu nedenle $f^2 = 0$ dır; f bir sıfırüslü (nilpotent) operatördür. Sıfırüslü bir operatörün izi sıfırdır. Dolayısıyla, iz $f = 0$ dır. iz $A = 0$ olduğundan, lemma bu durumda da kanıtlanmış olur.

Durum 3: $B = e_{jl}$ ve $j \neq l$ dir. Kanıt, Durum 2'dekinin benzeridir. $\square$