18.702 Cebir II
2008 Bahar

Mertebesi 28 olan gruplar

C_n mertebesi n olan devirli grubu ve D_n mertebesi $2n$ olan dihedral grubu göstermektedir.

Teorem. *Mertebesi 28 olan her grup, şu gruplardan birine izomorfiktir:* $C_4 \times C_7$, $C_2 \times C_2 \times C_7$, $C_2 \times D_7$, *ve* x *ile* y *tarafından* $x^7 = 1$, $y^4 = 1$ *ve* $yx = x^{-1}y$ *bağıntıları ile üretilen grup.*

Kanıt. G mertebesi 28 olan bir grup olsun. Sylow teoremleri, G nin mertebesi 4 olan bir H Sylow 2-altgrubu ve mertebesi 7 olan bir K Sylow 7-altgrubu olduğunu söyler. Dahası, Sylow 7-altgrupların sayısı 4 ü böler ve mod 7 de 1 e denktir. Dolayısıyla bu sayı 1 dir ve bu da K nin bir normal altgrup olmasını gerektirir. Sylow teoremleri, Sylow 2-altgrubun normal olduğu sonucuna varmamıza imkan vermemektedir.

Mertebesi 4 olan grupların iki izomorfizm sınıfı vardır, devirli grup C_4 ve Klein'in dörtlü grubu $C_2 \times C_2$.

Lemma 1. *k, K nin ve h, H nin elemanı olmak üzere elde edilen 28 kh çarpımının herhangi ikisi aynı değildir ve bu nedenle G grubunun tüm elemanları bunlardır.*

Kanıt. $k_1h_1 = k_2h_2$ olsun. k_2 yi sola, h_1 i sağa alarak, $k_2^{-1}k_1 = h_2h_1^{-1}$ elde ederiz. Eşitliğin sağ tarafındaki eleman H deyken, sol tarafındaki eleman K dedir. 4 ve 7 aralarında asal olduğundan, $K \cap H = \{1\}$ olur. Dolayısıyla, $k_2^{-1}k_1 = 1$ ve $h_2h_1^{-1} = 1$ dir. Bu, $k_1 = k_2$ ve $h_1 = h_2$ olmasını gerektirir. □

Durum 1: H devirli grup C_4 tür.

y elemanı H nin ve x de K nin üreteci olsun. Grubun kh biçimindeki 28 elemanı $0 \le i \le 6$ ve $0 \le j \le 3$ olmak üzere x^iy^j olarak yazılır. K normal bir altgrup olduğundan yxy^{-1}, K nin içindedir. Dolayısıyla, $0 \le \nu \le 6$ aralığı içindeki bir ν için $yxy^{-1} = x^\nu$ olur. Bunu şu şekilde yazabiliriz:

$$yx = x^\nu y. \tag{2}$$

Bu bağıntı bize x ve y lerden oluşan herhangi bir çarpımı x^iy^j biçimine sokma ve işlem tablosunu bu elemanlar cinsinden hesaplama olanağı verir. Dolayısıyla, her ν değeri için en fazla bir izomorfizm sınıfı vardır.

Eğer ν verilmişse, grup şu bağıntılara sahiptir:

$$x^7 = 1,\ y^4 = 1,\ yx = x^\nu y. \tag{3}$$

Her durumda bu bağıntılar bir G grubu tanımlar ve bu grubun bütün elemanları x^iy^j biçiminde yazılabilir. Ancak, $0 \le i < 7$ ve $0 \le j < 4$ için her

$x^i y^j$ çarpımının farklı bir eleman olduğu açık değildir. Bu noktayı ele almamız gerekmektedir.

Aslında, $y^4 = 1$ bağıntısı ν üssü için bazı koşullar koyar, çünkü bir elemanın y^4 ile eşleniği alındığında eleman değişmez. Eğer $yxy^{-1} = x^\nu$ ise, $y^2xy^{-2} = yx^\nu y^{-1} = x^{\nu^2}$ ve benzer biçimde $y^4xy^{-4} = x^{\nu^4}$ olur. Dolayısıyla, $x^{\nu^4} = x$ dir ve bu, $\nu^4 \equiv 1$ (modulo 7) demektir. Bu nedenle, $\nu = 1$ veya 6 haricinde üs olamaz.

Bu noktayı vurgulamak için, $yxy^{-1} = x^2$ olduğunu varsayalım. O zaman $x = y^4xy^{-4} = x^{16} = x^2$ dir. $x = x^2$ bağıntısı $x = 1$ olmasını gerektirir. $\nu = 2$ olduğunda (3) bağıntıları tarafından tanımlanan grup y tarafından üretilen mertebesi 4 olan devirli gruptur.

Bu durumda elimizde kalan bağıntılar $yx = xy$ ve $yx = x^6y = x^{-1}y$ dir.

Eğer $xy = yx$ ise, grup x ve y tarafından üretildiğinden Abeldir. Sylow 2-altgrubu devirli olan bir Abel grubu biliyoruz, $C_4 \times C_7$.

Kalan durum $yx = x^{-1}y$ dir. Böyle bir grup var mıdır? Bununla şunu kastediyoruz: $\nu = 6$ iken (3) bağıntıları tarafından tanımlanan grubun mertebesi 28 midir? Bu grubun varlığını göstermenin bir yolu Todd-Coxeter algoritmasını kullanmaktır, fakat bir grubun varlığını göstermenin en basit yolu, eğer mümkünse grubu açıkça yazmaktır. Burada bu yapılabilir. $\zeta = e^{2\pi i/7}$ olsun.

$$x = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

karmaşık matrisleri $\nu = 6$ iken (3) bağıntılarını sağlar ve mertebesi 28 olan bir grup üretir.

Durum 2: H Klein'in dörtlü grubu $C_2 \times C_2$ dir.

Klein'in dörtlü grubunu $H = \{1, u, v, w\}$ biçiminde yazarız. u, v, w elemanlarının kareleri 1 e eşittir, her biri diğeriyle değişme özelliğine sahiptir ve herhangi ikisinin çarpımı üçüncüyü verir. Dolayısıyla, aralarında öz olarak bir fark yoktur.

Lemma, grup G nin elemanlarının

$$x^i, x^iu, x^iv, x^iw \tag{5}$$

olduğunu söyler. K normal bir altgrup olduğundan, $uxu^{-1} = x^\nu$ eşitliğini sağlayan bir ν değeri vardır ve $u^2 = 1$ olduğundan, ν nün alabileceği değerlerin 1 ve 6 olduğu görülür. Dolayısıyla, ux çarpımı, ya xu ya da $x^{-1}u$ çarpımına eşittir. Benzer ifadeler vx ve wx için de doğrudur.

ux, vx ve wx çarpımlarının x solda olacak şekilde yeniden nasıl yazılacağını bilirsek, işlem tablosunu da oluşturabiliriz. Bu nedenle, her durum için en fazla bir grup vardır.

u, v, w elemanlarının hepsi x ile değişme özelliğine sahipse, G Abel grubudur. Bu koşulları sağlayan bir Abel grubu biliyoruz, $C_2 \times C_2 \times C_7$. Dolayısıyla, olası durumlardan biri budur.

u, v, w elemanlarının hepsi birden x ile değişme özelliğine sahip olmasın. Diyelim ki $ux = x^{-1}u$ olsun. $w = uv$ olduğundan, $vx = xv$ ise $wx = x^{-1}w$ ve $vx = x^{-1}v$ ise $wx = xw$ elde ederiz. Dolayısıyla u, v, w elemanlarından tam olarak bir tanesi x ile değişme özelliğine sahiptir. Bu eleman w olacak biçimde üç elemanı yeniden adlandırabiliriz: $ux = x^{-1}u, vx = x^{-1}v$ ve $wx = xw$.

Bu bağıntılar işlem tablosunu hesaplama olanağı verdiğinden, Abel olmayan gruplar içinde Sylow 2-altgrupları Klein'in dörtlü grubu olan en fazla bir izomorfizm sınıfı vardır. Böyle bir grup biliyoruz, $C_2 \times D_7$. Böylece liste tamamlanmış olur. $\square$

Bu arada, D_{14} grubu listemizdeki bir gruba izomorf olmalıdır. Nitekim, $C_2 \times D_7$ grubuna izomorftur. Bunu doğrudan göstermeyi deneyiniz.