18.702 Cebir II
2008 Bahar

Sonbahar 2007

Permütasyonlar

Bu not çevrim gösterimi ve permütasyonların bileşkesi ile ilgilidir.

Öncelikle iki küme arasındaki $f : U \to V$ fonksiyonu için kullanılan terminolojiyi tekrar edelim.

• f *Birebir*: u_1, u_2 U nun elemanları ve $u_1 \neq u_2$ ise, $f(u_1) \neq f(u_2)$ dir.

• f *Örten*: Her $v \in V$ elemanı için, $f(u) = v$ eşitliğini sağlayan bir $u \in U$ elemanı vardır.

• f *Bijektif*: Hem birebir hem örtendir.

Bijektif fonksiyonların iki önemli özelliği şunlardır:

Önerme 1. *$f : U \to V$ fonksiyonunun bijektif olması için gerek ve yeter koşul, f nin, $f \circ g : V \to V$ birim fonksiyonu ve $g \circ f : U \to U$ birim fonksiyonu olacak biçimde $g : V \to U$ ters fonksiyonuna sahip olmasıdır.* □

Önerme 2. *$f : U \to V$ fonksiyonu aynı sayıda elemana sahip sonlu kümeler arasında olsun: $|U| = |V|$. f nin bijektif olması için gerek ve yeter koşul f nin birebir olmasıdır, ve aynı zamanda yine gerek ve yeter koşul f nin örten olmasıdır.* □

Bir U kümesinden kendisine olan bijektif fonksiyon, U nun bir permütasyonu olarak adlandırılır. Örneğin, aşağıdaki tablo

$$\begin{array}{c|l} p & : \mathbf{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8} \\ \hline f(p) & : \mathbf{3\ 6\ 2\ 5\ 4\ 8\ 7\ 1} \end{array} \qquad (2)$$

dik olarak $p(\mathbf{1}) = \mathbf{3}$, $p(\mathbf{2}) = \mathbf{6}$, vb. biçiminde okunduğunda $U = \{\mathbf{1,...,8}\}$ kümesinin bir permütasyonunu gösterir.

Bir U kümesinin permütasyonları, üzerindeki işlem fonksiyonların bileşkesi olarak tanımlanan Perm(U) grubunu oluşturur

$\{\mathbf{1,2,...,n}\}$ kümesinin permütasyonlarının grubu *simetrik grup* olarak adlandırılır ve S_n ile gösterilir. n elemanlı bir kümenin $n!$ permütasyonu vardır. Bu nedenle, S_n nin $|S_n|$ *mertebe*si, yani eleman sayısı $n!$ dir.

Bu notun kalan kısmı, simetrik grupla çalışıldığında kullanılan *çevrim gösterim*ini açıklamaktadır.

p, $\{\mathbf{1,\ 2,\ ...,\ 8}\}$ kümesinin bir permütasyonu olsun. Rasgele bir indeks, örneğin 2 seçelim. Diyelim ki, yukardaki örnekte olduğu gibi, $p(\mathbf{2}) = \mathbf{6}$, $p(\mathbf{6}) = \mathbf{8}$, $p(\mathbf{8}) = \mathbf{1}$, $p(\mathbf{1}) = \mathbf{3}$, ... :

$$\mathbf{2} \to \mathbf{6} \to \mathbf{8} \to \mathbf{1} \to \mathbf{3}...$$

İndeksler kümesi sonlu olduğundan, bir dizi bir indeksi tekrar etmeden sonsuza dek devam edemez. Örneğin, $p(3)$ ün, bu dizide yer alan **2,6,8,1,3** indekslerinden biri olduğunu varsayalım. $p(\mathbf{2}) = \mathbf{6}$ ve p birebir olduğundan $p(\mathbf{3}) \neq \mathbf{6}$ olduğunu söyleriz. Benzer şekilde, $p(\mathbf{3}) \neq \mathbf{8},\ \mathbf{1},\ \mathbf{3}$. Dolayısıyla, $p(\mathbf{3}) = \mathbf{2}$ dir:

$$\mathbf{2} \to \mathbf{6} \to \mathbf{8} \to \mathbf{1} \to \mathbf{3} \to \mathbf{2}$$

Bu dizi 5-*çevrim* olarak adladırılır ve $(\mathbf{2\ 6\ 8\ 1\ 3})$ ile gösterilir.

Bu çevrim (2) de verilen permütasyon p nin bir parçasını tanımlar, fakat bu tanımı tamamlamak için kalan üç indeks olan $\mathbf{4},\ \mathbf{5},\ \mathbf{7}$ den de çevrimler oluşturmalıyız. Bunlar iki çevrim oluştururlar, birincisi *transpozisyon* veya 2-çevrim olan $(\mathbf{4\ 5})$ ve ikincisi sabit indeks veya 1-çevrim olan $(\mathbf{7})$. Genel bir kabul olarak, gösterimde 1-çevrimler yer almaz. Dolayısıyla, permütasyonu

$$p = (\mathbf{2\ 6\ 8\ 1\ 3})(\mathbf{4\ 5}) \tag{4}$$

biçiminde yazarız. Bu gösterimde her indeks en fazla bir kez görülür ve görünmeyen indeks olan 7 permütasyon tarafından sabit bırakılır. (Bahsi geçen genel kabulün belirsizliğe yol açmaması için, çalıştığımız indeks setini bilmemiz gerekmektedir.)

Çevrim gösteriminin küçük bir eksiği biricik olmamasıdır, çünkü bir çevrimde yer alan herhangi bir indeks ile başlanabilir:

$$p = (\mathbf{2\ 6\ 8\ 1\ 3}) = (\mathbf{6\ 8\ 1\ 3\ 2}) = (\mathbf{8\ 1\ 3\ 2\ 6}) = ..., \tag{5}$$

ve ikincisi, ayrık indekslerden oluşan çevrimlerin hangi sırayla yazıldığının önemi yoktur:

$$p = (\mathbf{2\ 6\ 8\ 1\ 3})(\mathbf{5\ 4}) = (\mathbf{5\ 4})(\mathbf{2\ 6\ 8\ 1\ 3}). \tag{6}$$

Şimdi, simetrik gruptaki işlem olan fonksiyonların bileşkesine dönelim. p, q iki permütasyonsa, pq, fonksiyonların $p \circ q$ bileşkesini gösterir. Dolayısıyla, bir indekse uygulanan ilk permütasyon q dur ve bunu p izler. Kitabın 6. Bölümü diğer ters konvansiyonu kullanmaktadır. Bir başka deyişle, pq yu "önce p yi uygula, sonra q yu" şeklinde okur. Bu notu yazmamın esas nedeni $pq = p \circ q$ yu şu şekilde okumak istememdir: "Önce q yu uygula, sonra p yi".

Örneğin, $p = (\mathbf{2\ 6\ 8\ 1\ 3})(\mathbf{4\ 5})$ ve

$$q = (\mathbf{2\ 4\ 7})(\mathbf{1\ 6\ 8\ 5}) \tag{7}$$

olduğunu varsayalım.

pq permütasyonunu hesaplamak için bir indeksle, diyelim $\mathbf{1}$, ile başlayalım. $p(q(\mathbf{1})) = p(\mathbf{6}) = \mathbf{8},\ p(q(\mathbf{8})) = p(\mathbf{5}) = \mathbf{4}$, vb.

$$pq = p \circ q = (\mathbf{1\ 8\ 4\ 7\ 6})(\mathbf{2\ 5\ 3}). \tag{8}$$

Bu ilk bakışta biraz garip görünebilir, çünkü bir çevrim soldan sağa doğru okunurken, permütasyonların bileşkeleri sağdan sola, geriye doğru çalışılmaktadır. Fakat, sonuçta zor değildir. Neyse ki, tek bir permütasyonu oluşturan ayrık çevrimlerin okunma sırasının da önemi yoktur. (Bkz. (6)).

Hesabı yapmanın bir yolu q nun çevrim gösterimini p ninkinin soluna yazmaktır:

$$p \circ q = \text{önce } q(\mathbf{2\ 4\ 7})(\mathbf{1\ 6\ 8\ 5}) \text{ sonra } p(\mathbf{2\ 6\ 8\ 1\ 3})(\mathbf{4\ 5}). \tag{9}$$

Şimdi indeksleri soldan sağa izleyebiliriz: İlk olarak $\mathbf{1} \to \mathbf{6} \to \mathbf{8}$, $\mathbf{8} \to \mathbf{5} \to \mathbf{4}$, $\mathbf{4} \to \mathbf{7} \to \mathbf{7}$, vb.

Alıştırmalar.

1. Transpozisyonların (2-çevrim) S_n simetrik grubunu ürettiğini gösteriniz.

2. 3-çevrimlerin alterne A_n grubunu ürettiğini gösteriniz.