18.702 Cebir II
2008 Bahar

5 Nisan 2008

18.702 Çalışma Sınavı 2

Bu geçen yılın sınavıdır.

Lütfen, nasıl akıl yürüttüğünüzü gösteriniz.

1. *(20 puan)* $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{R}$ homomorfizmi $\phi(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$ olarak tanımlansın. ϕ nin çekirdeğinin tek üreteçli bir ideal olduğunu kanıtlayınız ve bu idealin üretecini bulunuz.

2. *(15 puan)* $\mathbb{Z}[i]$ halkası içinde, bir π Gauss asalının bir ve yalnız bir tamsayı asalı böldüğünü kanıtlayınız.

3. *(30 puan)* $\delta = \sqrt{-10}$ olmak üzere $R = \mathbb{Z}[\delta]$ olsun. Bu halka için $\lfloor \mu \rfloor = 3$ dür.

(a) $p = 2$ ve/veya $p = 3$ asallarının, R içinde asal kalıp kalmadığına karar veriniz.

(b) $p = 2$ veya 3 asal kalmıyorsa, R deki tek üreteçli (p) idealini bölen asal idealin üreteçlerini bulunuz.

(c) R nin ideal sınıf grubunu belirleyiniz.

4. *(15 puan)* $L = \mathbb{Z}^2$, düzlemdeki tamsayı latisi olsun ve M

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

tarafından gerilen altlatis olsun. M nin L içindeki $[L : M]$ indeksini belirleyiniz.

5. *(20 puan)* Üç x, y, z elemanı tarafından

$$6x + 4y + 4z = 0 \text{ ve } 2x + 2y + 8z = 0$$

bağıntıları ile üretilen A Abel grubunu, devirli grupların dolaysız toplamı olarak yazınız.