# 18.06 – Bahar 2005- Problem Seti 3

## Zoralayıcı Problem 1:

R ( mxn bir matris) r sıfırdan farklı satırı ve ilk r pivot sütunu ile satırca indirgenmiş eşelon formda $\begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun.

a) R'nin sütun uzayını ve sıfır uzayını tanımlayın.

b) Aynı soruyu mx2n matris olan *B = (R   R)* için cevaplayın.

c) Aynı soruyu mx2n matris olan $C = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}$ için cevaplayın.

d) Son olarak, aynı soruyu 2mx2n matris olan $D = \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$ için cevaplayın.

## Zoralayıcı Problem 2:

a) $A$ 3x3 matris olsun. $A$'nın sıfır uzayı ve $A^2$'nin sıfır uzayı arasında nasıl bir ilişki vardır? Peki ya $A^3$'ün sıfır uzayı arasında nasıl bir ilişki vardır?

b) x değişkenli derecesi en fazla dört olan polinomlar kümesi bir vektör uzayıdır. $\frac{d^2}{dx^2}$'nin sıfır uzayı nedir? $\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)^2$'nin sıfır uzayı nedir?

**Çözümler:**

**Problem 1**

a) Sütun uzayı son m-r koordinatı sıfır olan bütün vektörlerin uzayıdır. Bu R matrisinin rankı r ve R'nin ilk r sütunu bağımsız olduğu için açıktır.

$f_{ij}$ F'nin (i,j) pozisyonundaki eleman olsun. R'nin sıfır uzayı aşağıdaki n-r vektörün doğrusal kombinasyonun uzayıdır.

$$\begin{pmatrix} -f_{11} \\ -f_{21} \\ \vdots \\ -f_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -f_{12} \\ -f_{22} \\ \vdots \\ -f_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -f_{1(n-r)} \\ -f_{2(n-r)} \\ \vdots \\ -f_{r(n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Açıktır ki bu vektörler doğrusal bağımsızdır ve sonuç olarak sıfır uzayının boyutu n-r'dir.

b) B matrisinin sütun uzayı R'nin sütun uzayı ile aynıdır. $g_{ij}$ r x(2n-r) matris $G := (F \quad I \quad F)$'nin (i,j) pozisyonundaki eleman olsun. Elimizde $B = \begin{pmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ var. B'nin sıfır uzayı aşağıdaki 2n-r vektörün doğrusal kombinasyonun uzayıdır.

$$\begin{pmatrix} -g_{11} \\ -g_{21} \\ \vdots \\ -g_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -g_{12} \\ -g_{22} \\ \vdots \\ -g_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -g_{1(2n-r)} \\ -g_{2(2n-r)} \\ \vdots \\ -g_{r(2n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aynı vektörleri F matrisi cinsinden şöyle yazabiliriz:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-f_{11}\\-f_{21}\\\vdots\\-f_{r1}\\1\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-f_{12}\\-f_{22}\\\vdots\\-f_{r2}\\0\\1\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}-f_{1(n-r)}\\-f_{2(n-r)}\\\vdots\\-f_{r(n-r)}\\0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{(n-r)\ vekt\ddot{o}r},\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\-1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{r\ vekt\ddot{o}r},\underbrace{\begin{pmatrix}-f_{11}\\-f_{21}\\\vdots\\-f_{r1}\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}-f_{1(n-r)}\\-f_{2(n-r)}\\\vdots\\-f_{r(n-r)}\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}}_{(n-r)\ vekt\ddot{o}r}$$

Açıkca görülüyor ki bu vektörler doğrusal bağımsızdır, dolayısıyla B'nin sıfır uzayının boyutu 2n-r'dir.

c) C'nin sütun uzayı koordinatları $b_i$ olup aşağıdaki denklemleri sağlayan 2m-boyutlu uzaydaki vektörlerin uzayıdır.

$$\begin{aligned} &b_i = b_{i+m} && 1 \le i \le m \\ &b_j = 0 && r+1 \le j \le m \end{aligned}$$

yani vektörler aşağıdaki formdadırlar:

$$\begin{pmatrix} b_1\\\vdots\\b_r\\0\\\vdots\\0\\b_1\\\vdots\\b_r\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

C'nin sıfır uzayı R'nin sıfır uzayı ile aynıdır.

d) D'nin sütun uzayı C'nin sütun uzayı ile aynıdır.D'nin sıfır uzayı B'nin sıfır uzayı ile aynıdır.

**Problem 2**

a) $A$'nın sıfır uzayı $A^2$'nin sıfır uzayı tarafından kapsanır. Bunun sebebi şöyle açıklanabilir. $Ax = 0$ ise, yani $x$ $A$'nın sıfır uzayında ise, $A^2 x = A.(Ax) = 0$'dır. O zaman $x$ $A^2$'nin de sıfır uzayındadır. Benzer şekilde şunu söyleyebiliriz:

$N(A) \subset N(A^2) \subset N(A^3) \subset \ldots$

$A$ nxn matris ise $N(A^n) = N(A^{n+1}) = \cdots$ olduğu ispatlanabilir.

b) Tanım gereği sıfır uzayı $\frac{d^2}{dx^2} v = 0$ denklemini sağlayan bütün $v$ vektörleri kümesidir. Bunun anlamı şudur, $v$ polinomu doğrusal olmak zorundadır: $v = cx + d$. Bu yüzden sıfır uzayı derecesi en fazla bir olan polinomlar uzayıdır.

$\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)^2$'nin sıfır uzayı $\frac{d^2}{dx^2}$'nin kendisiyle bileşkesinin sıfır uzayıdır: $\frac{d^4}{dx^4}$'nin sıfır uzayı. $\frac{d^4}{dx^4}$'nin sıfır uzayı ise derecesi en fazla üç olan bütün polinomların uzayıdır: $v = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .