18.06 – Bahar 2005- Problem Seti 4

MATLAB Problemleri:

Aşağıdaki 6 x 6 matrislerini oluşturun:

- K= toeplitz ([2, -1, zeros (1, 4)])
- T = K ; T(1, 1) = 1
- C = toeplitz ([2, -1, zeros(1, 3), -1])

1. C tekil dir. Nedenini açıklayınız? Eğer A 6 köşeli ve 6 kenarlı (altıgen) bir döngünün incidence (komşuluk) matrisi (bölüm 8.2) ise, MATLAB veya el ile C = $A^T A$ oduğunu gösteriniz.
2. T matrisi inv(T) basit ters'ine sahiptir. T n'ye n'lik olduğunda, T^{-1} in i, j inci posizyonumfaki elemanı için bir formül bulun.
3. $T-K$ matrisi kesinlikle rankı 1 olan bir matristir. $T^{-1}-K^{-1}$ (6 x 6) yı hesaplayın ve bunu $u\,v^T$ şeklinde rankı 1 formunda ifade ediniz. Bu problem bölüm 2.5 deki alıştırma 43 ün önemli bir örneğidir.

Çözüm:

MATLAB'ı kullanarak $K=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ve

$C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ olarak elde ettik.

1. C matrisi tekil dir çünkü C'nin sütunlarının toplamı 0 vektördür. $C\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

   Altıgen'in komşuluk matrisi ise $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1&-1\\-1&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ matrisidir. Basit bir hesaplama ile C = A^TA olduğu gösterilir.

2. MATLAB'ı kullanarak $inv(T)=\begin{bmatrix}6&5&4&3&2&1\\5&5&4&3&2&1\\4&4&4&3&2&1\\3&3&3&3&2&1\\2&2&2&2&2&1\\1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}$ elde ettik ve tahmin edebileceğiniz gibi n xn lik T^{-1} matrisinin (i, j) –inci elemanını için formül

$$(T^{-1})_{ij}=n+1-\max\{i,j\}$$

   olur. Bunun gerçekten T nin tersi olduğunu görmek için, $T\,T^{-1}$ ü hesaplayalım.

   $1<j<n$ için, bu çarpımın j-inci sütunu $2\begin{pmatrix}j\\\vdots\\j\\j\\j-1\\j-2\\\vdots\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}j+1\\\vdots\\j+1\\j\\j-1\\j-2\\\vdots\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}j-1\\\vdots\\j-1\\j-1\\j-1\\j-2\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ olur,

   burada 1 j-inci satır dadır. Bu çarpımın birinci sütunu $2\begin{pmatrix}n\\n-1\\n-2\\\vdots\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}n-1\\n-1\\n-2\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}$ olup son sütunu ise $2\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\\vdots\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ olur. Böylece yukarıdaki tahminimizin doğru olduğu açıktır.

3. Bölüm 2.5 deki 43. problemin ikinci kısmında M = K ve A = T kullanarak, ve

$K=T-\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ olduğu gerçeğinden,

$$K=T^{-1}+(1-\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}T^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix})^{-1}T^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}T^{-1}=$$

$$=T^{-1}+(1-\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\5\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix})^{-1}\begin{pmatrix}6\\5\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}T^{-1}=$$

$$=T^{-1}+\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\5\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}T^{-1}= \;=T^{-1}-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\5\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$ olur, ve

böylece $T^{-1}-K^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\5\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$ elde edriz.