# *Ehrenfest Teoremi*

Harmonik osilatör ders notlarında, standart yaklaşımlar - Hermit polinomları içeren integraller (Bölüm 12-15 Ders Özeti, sayfa 63-65) kullanılarak $\langle \hat{x} \rangle(t)$ ve $\langle \hat{p}_x \rangle(t)$ için ifadeler türetilmiştir. Hesaplamalar, cebir ağırlıklı olup, $\langle \hat{x} \rangle(t)$ ve $\langle \hat{p}_x \rangle(t)$' nin titreşim frekansında osilasyon yaptığı bulunmuştur. Sonuçlar aşağıdaki gibidir:

$$\langle x \rangle(t) = (2\alpha)^{-1/2}\cos(\omega_{\text{tit}} t) = \left(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\right)^{1/2}\cos(\omega_{\text{tit}} t)$$

ve

$$\langle p \rangle(t) = \frac{1}{2}\left[i\hbar\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/2}\left(e^{i\omega_{\text{tit}} t} - e^{-i\omega_{\text{tit}} t}\right)\right] = -\left(\frac{\hbar\mu\omega}{2}\right)^{1/2}\sin(\omega_{\text{tit}} t)$$

Burada dikkat edilmesi gereken husus, $\langle x \rangle(t)$ ve $\langle p \rangle(t)$' nin daha basit bir şekilde hesaplanması için kullanılacak yaklaşımlardır.

Klasik olarak

$$p = mv = m\frac{dx}{dt}$$

dir (serbest bir parçacık için $\mu$ yerine $m$ kullanılır).

Kuantum mekaniksel olarak

$$\langle p \rangle(t) = m\frac{d\langle x \rangle(t)}{dt}.$$

tahmin edilebilir. Ancak, bu ifade geçerli midir? Bu ifadenin gerçekte, aşağıdaki ispatla verildiği gösterilebilir:

$\dfrac{d\langle x \rangle(t)}{dt}$ için orijinal ifade

$$\frac{d\langle x \rangle(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\psi^* \hat{x}\psi\, dx\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi^*}{dt}\hat{x}\psi\, dx + \int_{-\infty}^{\infty}\psi^* \hat{x}\frac{d\psi}{dt}dx$$

şeklindedir.

Zamana bağlı Schrödinger denklemi hatırlanırsa

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi \quad \text{veya} \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{i\hbar}H\psi$$

Bu sonuçlar, yukarıdaki ifadede yerine konularak

$$\frac{d\langle x\rangle(t)}{dt}=-\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\hat{H}\psi\right)^{*}\hat{x}\psi\,dx+\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}\hat{x}\left(\hat{H}\psi\right)dx$$

$$=\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}\left(\hat{x}\hat{H}-\hat{H}\hat{x}\right)\psi dx \;=\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}\left(\hat{H}\hat{x}-\hat{x}\hat{H}\right)\psi dx$$

sonucu elde edilir.

Komutatör (H'nin harmonik osilatör Hamiltonyen olduğu varsayılır) değerlendirildiğinde

...

$$\left(\hat{H}\hat{x}-\hat{x}\hat{H}\right)f(x)=\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)\right)\hat{x}\,f(x)-\hat{x}\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)\right)f(x)$$

$$=-2\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{df}{dx}=-\frac{\hbar^2}{\mu}\left(\frac{i}{\hbar}\hat{p}_x\right)=-\frac{i\hbar}{\mu}\hat{p}_x$$

bulunur. Böylece

$$\frac{d\langle x\rangle(t)}{dt}=\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}\left(\hat{H}\hat{x}-\hat{x}\hat{H}\right)\psi dx=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}\hat{p}_x\psi\,dx$$

sonucuna varılır. Bu sonuç, istenilen sonuçtur.

$$\boxed{\langle\hat{p}_x\rangle(t)=\mu\frac{d\langle x\rangle(t)}{dt}}$$

Bu şekilde, harmonik osilatör ders notlarında yer alan uzun hesaplamalar olmadan $\langle\hat{p}_x\rangle(t)$ elde edilebilir.

$$\langle \hat{p}_x \rangle(t) = \mu \frac{d\langle x \rangle(t)}{dt} = \mu \frac{d}{dt}\left\{ \left( \frac{\hbar}{2\mu\omega} \right)^{1/2} \cos(\omega t) \right\} = -\left( \frac{\mu\omega\hbar}{2} \right)^{1/2} \sin(\omega t)$$

$$\boxed{\langle \hat{p}_x \rangle(t) = -\left( \frac{\mu\omega\hbar}{2} \right)^{1/2} \sin(\omega t)}$$

Bu sonuç, başlangıçta kullanılan sonuçtur.

Yukarıdaki denklemler, Paul Ehrenfest (Hollanda, Leiden'de yerleşmiş Avusturyalı fizikçi)' den dolayı daha genel bir sonucun özel bir gösterimidir ve Ehrenfest Teoremi olarak bilinir. Özellikle, herhangi bir dinamik *F* değişkeni için

$$\frac{d\langle F \rangle(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left( \hat{H}\hat{F} - \hat{F}\hat{H} \right) \psi \, dx$$

yazılır. Daha fazla bilgi için McQuarrie problemlerine bakılabilir.