18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

DERS 23. HARMONİK SALINIM

Özeşlenik kompakt dönüşümler için, spektral teoreminin tamlık kısmının 'önemli' bir uygulaması olarak $L^2(\mathbb{R})$ için Hermite tabanını tartışmak istiyorum. Bu zamana kadar $L^2(\mathbb{R})$ uzayının ayrılabilir olduğunu bilmemize karşın, gerçel sayılar üzerinde açık bir ortonormal taban bulmadık. Ancak öyle bir tabanın varlığını biliyoruz. Açık bir taban nasıl oluşturulabilir ve bu tabanın kullanışlı özellikleri nelerdir? Bir yol-Gramm-Schmidt yöntemi kullanarak-sayılabilir ve gerdiği uzay yoğun olan bir kümeyi-ortonormalleştirmektir. Örneğin,

$$(23.1) \quad exp(-\frac{x^2}{2}) \in L^2(\mathbb{R})$$

olarak tanımlanan temel Gauss fonksiyonunu ele alalım.
Bunlar sonsuzda hızla azalan ve herhangi bir polinomla çarpımı kare integrallenebilir olan fonksiyonlardır:

$$(23.2) \quad x^k exp(-\frac{x^2}{2}) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$$

Bu dizi ortonormalleştirmeyle ortonormal bir taban verir, tamlık kısmı uygun yaklaşım tekniği kullanılarak gösterilebilir. Doğrudan yaklaşım yerine aşağıdaki harmonik salınımın tersinirliğini tartışaçağız.

$$(23.3) \quad H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$$

H dönüşümünün hangi uzay üzerinde etki ettiği konusunda şimdilik belirsizlikler olsada H yı bir dönüşüm olarak düşünüp tersinir olduğunu tartışacağız.

Ilk gözlemlenecek olan Gauss fonksiyonunun, H'nın bir özfonksiyonu olduğudur.

$$(23.4) \quad He^{\frac{-x^2}{2}} = -\frac{d}{dx}(-xe^{\frac{-x^2}{2}} + x^2e^{\frac{-x^2}{2}} - (x^2-1)e^{\frac{-x^2}{2}} + x^2e^{\frac{-x^2}{2}} = e^{\frac{-x^2}{2}},$$

ve özdeğeri 1 dir.

Aslında, bu özel durumda, Gauss fonksiyonundan özfonksiyonların hepsini üreten cebirsel bir yol vardır. Bunun için

$$C = (-\frac{d}{dx} + x), \quad A = (\frac{d}{dx} + x)$$

olmak üzere

$$(23.5)\quad Hu = (-\frac{d}{dx} + x)(\frac{d}{dx} + x)u + u = (CA + 1)u.$$

yazalım. Bu durumda

$$(23.6)\quad Ae^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

dir ve bu (23.4)'ü kanıtlar. (23.5) deki iki dönüşüm 'yaradılış' ve 'yoketme' dönüşümleridir. Aşağıdaki anlamda, u herhangi iki-kez sürekli türevlenebilir fonksiyon olmak üzere, A ve C dönüşümleri

$$(23.7)\quad (AC - CA)u = 2u$$

anlamında neredeyse değişmeli dönüşümlerdir.

'Temel durum' olarak $u_0 = e^{-\frac{x^2}{2}}$ alarak $u_1 = Cu_0$ diyelim. (23.7), (23.6) ve (23.5) den

$$(23.8)\quad Hu_1 = (CAC + C)u_0 = C^2Au_0 + 3Cu_0 = 3u_1.$$

Dolayısıyla u_1 özdeğeri 3 olan özfonksiyondur.

Önteorem 18. $j \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ için $u_j = C^j u_0$ fonksiyonu $Hu_j = (2j + 1)u_j$ eşitliğını sağlar.

Kanıt. j üzerinden tümevarım yapacağız. $j = 0$ ve $j = 1$ için doğru olduğunu yukarıdan biliyoruz. Bu durumda

$$(23.9)\quad HCu_j = (CA + 1)CU_j = C(H - 1)u_j + 3Cu_j = (2j + 3)u_j.\square$$

Yine, q_j'ler dereceleri en fazla $j-2$ olan polinomlar olmak üzere, tümevarımla $u_j = (2^j x^j + q_j(x))e^{-\frac{x^2}{2}}$ dir. Gerçekten bu $j = 0$ ve $j = 1$ için ($q_0 = q_1 = 0$) alınarak doğrulanır. Buradan

$$(23.10)\quad Cu_j = (2^{j+1}x^{j+1} + Cq_j)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ve $q_{j+1} = Cq_j$ dereceleri en fazla $j - 1$ olan bir polinomdurlar. q_{j+1} polinomunun derecesi q_j'nin derecesinden bir büyüktür.

Böylece $p(x)$ bir polinom olmak üzere, u_j ler tarafından gerilen uzay $p(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$'lerden oluşur.

Bütün bu fonksiyonlar $L^2(\mathbb{R})$ uzayındadırlar. Bunların normlarını hesap etmek istiyoruz. Standart integral hesabından

$$(23.11)\quad \int_{\mathbb{R}} (e^{-\frac{x^2}{2}})^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

$j > 0$ için kısmi integral alma yöntemi ile (önce $[-R, R]$ üzerinde integral alınıp sonra $R \to \infty$ alınarak),

$$(23.12) \qquad \int_{\mathbb{R}} (C^j u_0)^2 = \int_{\mathbb{R}} C^j u_0(x) C^j u_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0 A^j C^j u_0.$$

buluruz. Şimdi, (23.7) den, C'lerin j faktörü boyunca A'nın bir faktörünü çıkartmaya devam edip, u_0'ı 'yok edilerek';

$$(23.13) \quad AC^j u_0 = 2C^{j-1}u + CAC^{j-1}u_0 = 2C^{j-1}u_0 + C^2 AC^{j-2}u_0 = 2jC^{j-1}u_0$$

elde edilir. Dolayısı ile

$$(23.14) \qquad \int_{\mathbb{R}} (C^j u_0)^2 = 2j \int_{\mathbb{R}} (C^{j-1}u_0)^2 = 2^j j! \sqrt{\pi}.$$

Benzer biçimde

$$(23.15) \qquad \int_{\mathbb{R}} u_k u_j = \int_{\mathbb{R}} u_0 A^k C^j u_0 = 0, \quad k \neq j \quad \text{ise.}$$

Böylece

$$(23.16) \quad e_j = 2^{-\frac{j}{2}} (j!)^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} C^j e^{-\frac{x^2}{2}}$$

fonksiyonlarının $L^2(\mathbb{R})$ de ortonormal dizi olduğunu buluruz.

Bu ortonormal dizinin tam olduğunu göstermek istiyoruz. Yaklaşım yaparak yaklaşmak yerine aşağıdaki dönüşümün

$$(23.17) \quad AC = (\frac{d}{dx} + x)(-\frac{d}{dx} + x) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1$$

tersinir olduğunu tahmin edebiliriz. Bir yaklaşım 'tersi'ni oluşturmayı denemek ve ters dönüşümün gerçekten $L^2(\mathbb{R})$ de kompakt, özeşlenik, ve özfonksiyonların sadece (23.16) da verilen e_i ler olduğunu göstermek olabilir. Bunu doğrudan yapmak yerine dolaylı bir yol izlemeyi tercih ediyorum.

PROBLEM 10'NUN ÇÖZÜMLERİ

Problem P10.1 H sonsuz boyutlu ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. H'nın iki kopyasının direkt toplamının

$$(23.18) \quad (u_1, u_2) \in H \oplus H \, (u_1, u_2) \to (\|u_1\|_H^2 + \|u_2\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$$

normu ile donandığında Hilbert uzayı olduğunu gösteriniz. Ya bir mesafe koruyan(izometri), eşyapı dönüşümü(izomorfizma) yada bir başka biçimde,

$$(23.19) \quad T : H \to H \oplus H, \quad \text{örten, 1-1} \quad (\|u\|_H = (\|u\|_{H\oplus H})$$

(23.19) deki özellikleri sağlayan fonksiyon inşa ediniz.

Çözüm. (e_i), H'nın bir ortonormal tabanı olsun. Böyle bir taban H'nın sonsuz boyutlu ve ayrılabilir olduğundan vardır. Aşağıdaki dönüşümü tanımlayalım.

$$(23.20) \quad T : H \to H \oplus H, \quad T(u) = (\sum_{i=1}^{\infty}(u, e_{2i-1})e_i, \sum_{i=1}^{\infty}(u, e_{2i})e_i).$$

Fourier-Bessel serisinin yakınsamasından bu iyi tanımlı ve doğrusaldır. $Tu = 0$ olması durumunda her i için $(u, e_i) = 0$ ve buradan da $u = 0$ olacağından, T bire-birdir. Örten olması ise,

$$(23.21) \quad S : H \oplus H \to H, \quad S(u_1, u_2) = \sum_{i=1}^{\infty}((u_1, e_i)e_{2i-1} + (u_2, e_i)e_{2i})$$

dönüşümünün 2-yönlü ters olmasından hemen elde edilir ve Bessel özdeşliğinden izometri, yani, $\|S(u_1, u_2)\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$ elde edilir.

Problem P10.2 Yukarıdaki inşa sonlu sayıda tekrar edilebilir. H sonsuz boyutlu ayrılabilir Hilbert uzayı ise

$$(23.22) \quad l_2(H) = \{u : \mathbb{N} \to H, \|u\|_{l_2(H)}^2 = \sum_i \|u_i)\|_H^2 < \infty\}$$

nin Hilbert uzayı olduğunu ve $l_2(H)$'dan H'ye açık bir izometrik eşyapı dönüşümü tanımlayınız.

Çözüm. Önceki problemdeki benzer tartışmalar bu problem için de çalışır. H için bir (e_i) ortonormal tabanı alalım. $E_{i,j} \in l_2(H)$'nın elemanları, her i için

e_i ler i'ninci terimleri dışında sıfır, yani e_i, lerden oluşan vektörler, $l_2(H)$ için bir ortonormal tabandır. Ortonormal olduğu, iççarpım

$$(23.23) \quad (u,v)_{l_2(H)} = \sum_j (u_j, v_j)_H$$

olduğundan açıktır. Bu aynı zamanda, her j için $v = (v_j)(v, E_{j,i}) = 0$ olması H da $v_j = 0$ olmasını gerektirdiğinden, ayrıca ortonormal bir tabandır. İzometrik eşyapı tanımlamak için, $m : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ bir izomorfizma olmak üzere

$$(23.24) \quad Tu = v, \quad v_j = \sum_i (u, e_{m(i,j)})e_i \in H$$

tanımlansın. Bunun birebir, örten ve isometrik olduğu gösterilebilir.

Problem P10.3 Bir şekilde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de kapalı eğrinin sarım sayısını hatırlayınız. $Q = [0,1]^{\mathbb{N}}$ ve $f : Q \to \mathbb{C}^*$ sürekli ve $exp(2\pi ib) = f(0)$ eşitliğini sağlayan her $b \in \mathbb{C}$ için

$$(23.25) \quad exp(2\pi iF(q)) = f(q), \quad \forall q \in Q \quad \text{ve} \quad F(0) = b$$

ifadesini sağlayan tek $F : Q \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

1) $c : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ kapalı bir eğri olsun-yani sürekli ve $c(0) = c(1)$ sağlansın. $N = 1$ için $C : [0,1] \to \mathbb{C}$, F'nin bir seçimi olsun. Kapalı eğrinin sarım sayısının

$$(23.26) \quad wn(c) = C(1) - C(0) \in \mathbb{Z}$$

biçiminde tanımlanabileceğini gösteriniz.

Çözüm. Bu durumda C', F için bir başka seçim olsun. $g(t) = C'(t) - C(t)$ sürekli, gerçel değerli ve her $t \in [0,1]$ için $exp(2\pi g(t)) = 1$ olur. Dolayısıyla teklik nedeniyle bir sabit olmalıdır. Dolayısıyla, $C'(1) - C'(0) = C(1) - C(0)$ ve sarım sayısı iyi tanımlıdır.

(2)Sarım sayısı, $wn(c)$'nin homotopi altında sabit olduğunu gösteriniz. Yani, $i = 1,2$ olmak üzere $c_i : [0,1] \to \mathbb{C}^*$, $c_i(1) = c_i(0)$ iki kapalı eğri ve her $x \in [0,1]$ için, $f(0,x) = c_1(x)$, $f(1,x) = c_2(x)$, her $y \in [0,1]$ için $f(y,0) = f(y,1)$ olacak biçimde sürekli bir fonksiyon $f : [0,1]^2 \to \mathbb{C}^*$ varsa, $wn(c_1) = wn(c_2)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Bu f homotopi bağlantısını kullanarak F'yi seçelim. f fonksiyonu ikinci değişkende periyodik olduğundan ve iki eğri, $f(y,0)$ ve $f(y,1)$ aynı olduğundan teklik gereği $F(y,0)-F(y,1)$ sabit olmalı ve böylece $wn(c_2) = F(1,1)-F(1,0) = F(0,1)-F(0,0) = wn(c_1)$ elde edilir.

(3) $n \times n$ matrisinin kapalı eğrisi $L_n : x \in [0,1] \to e^{2\pi ix)} Id_{n\times n}$ ele alalım. $n \times n$ matrislerinin bildik özelliklerini kullanarak, bu eğrinin aşağıdaki anlamda birim matrise kapalı eğriler üzerinden homotopik olmadığını gösteriniz: her $x \in [0,1]$ için $G(0,x) = L_n(x)$, $\quad G(1,x) = Id_{n\times n}$ ve her $y \in [0,1]$ için $G(y,0) = G(y,1)$ olacak biçimde $G : [0,1]^2 \to L_n(x)$ sürekli fonksiyonunun olmadığını gösteriniz.

Çözüm. Determinant tersi olmayan matrislerde sıfır olan sürekli(esasında analitik) bir fonksiyondur. Üstelik özdeğerlerin çarpımı ile

$$(23.27) \quad det(L_n) = exp(2\pi ixn)$$

olacak biçimde verilir. Bu eğri 'genişletimi' xn olan periyodik bir eğridir ve sarım sayısı n dir. Eğer matrislerin periyodik eğrilerinin homotopisi olsa idi, her zaman tersinir olur ve bu durumda önceki sonuç nedeniyle determinantın sarım sayısının sabit olmak zorunda olurdu. Değeri birim metris olan sabit eğri için sarım sayısı 0 olacağından, böyle bir homotopi olamaz.

Problem P10.4 Ayrılabilir ve sonsuz boyutlu Hilbert uzayında L_n'ye yukarıdaki anlamda karşılık gelen, H'da tersinir dönüşümlerde değer alan kapalı eğriyi ele alalım.

$$(23.28) \quad L : [0,1] \ni x \to L(x) = e^{2\pi ix} Id_H \in GL(H) \subset \mathcal{B}(H).$$

Yukarıda olduğu gibi, H'ı, $H \oplus H$ ile eşleyerek değeri tersinir dönüşümler olan

$$(23.29) \quad M : [0,1]^2 \to GL(H \oplus H)$$

sürekli fonksiyonun varlığını ve
(23.30)

$$(23.30) \quad M(0,x) = L(x), M(1,x)(u_1,u_2) = (e^{4\pi ix}u_1, u_2), M(y,0) = M(y,1), \forall x,y \in [0,1]$$

olduğunu gösteriniz.
ip ucu Girdileri H'da olmak üzere $H \oplus H$'ı 2-vektör (u_1,u_2) gibi düşünebiliriz. Bu iki faktör arasında *dönme*yi düşünmemizi sağlar. Gerçekten

$$(23.31) \quad U(y)(u_1,u_2) = (cos(\pi y/2)u_1 + sin(\pi y/2)u_2, -sin(\pi y/2)u_1 + cos(\pi y/2)u_2)$$

ifadesinin $U(0) = Id$, $U(1)(u_1,u_2) = (u_2,-u_1)$ olacak biçimde $[0,1] \to GL(H \oplus H)$, $y \to U(y)$ sürekli bir fonksiyon tanımladığını gösteriniz. Şimdi $V_1(x)$ ve $V_2(x)$ fonksiyonları, sırasıyla, birinci ve ikinci bileşenleri sabit bırakarak diğerinin $exp(2\pi ix)$ çarpımıyla elde edilen $H \oplus H$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere 2-parametreli

$$(23.32) \quad U^{-1}(y)V_2(x)U(y)V_1(x)$$

dönüşümler ailesini düşününüz.

Çözüm 10.4 Iki boyutlu uzayda olduğu gibi $U(y)$, tersi $U(-y)$ olan tersinir bir dönüşümdür. Bu (23.32) de tanımlanan $[0,1]^2$ de tanımlı $W(x,y)$ fonksiyonunun $H \oplus H$ da tanımlı sınırlı ve tersinir dönüşümlerden oluştuğunu gösterir, yani $W : [0,1]^2 \to GL(H \oplus H)$ dır. $x = 0$ ya da $x = 1$ olma durumunda $V_1(x)$ ve $V_2(x)$ her ikisi de birim olur ve böylece her y için $W(0,y) = W(1,y)$ ve dolayısıyla W, x de periyodiktir. Üstelik $y = 0$ için $W(x,0) = V_2(x)V_1(x)$, $L(x)$ dir, birimin bir katı olur. Dğer taraftan

$$(23.33) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{2\pi ix}u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} u_2 \\ -e^{2\pi x}u_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u_2 \\ -e^{2\pi x}u_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{4\pi x} \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Bu (23.30) da M'nin aranan özelliğidir.

Problem 10.5 Bir önceki problemdekine benzer dönme kullanarak sürekli

$$(23.34) \quad G : [0,1]^2 \to GL(H \oplus H)$$

ve aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$(23.35) \quad G(0,x)(u_1,u_2) = (e^{2\pi ix)}u_1, e^{-2\pi ix}u_2),$$

$$G(1,x)(u_1,u_2) = (u_1,u_2), \quad G(y,0) = G(y,1)\forall x,y \in [0,1]$$

sağlayan sürekli fonksiyonun varlığını gösteriniz.

Çözüm 10.5. $G(y,x)$ olarak

$$(23.36) = U(-y)\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & e^{-2\pi ix} \end{pmatrix} U(y) \begin{pmatrix} e^{2\pi ix} & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

ifadesini ele alalım. Yukarıdaki aynı nedenle, bu, (23.35)'i sağlayan $H \oplus H$ da tanımlı tersinir dönüşümlerin kapalı bir eğrilerinin homotopisidir.

Problem 10.6. Yukarıda oluşturulan çeşitli yapıları aşağıdaki gibi birleştirelim: $l_2(H)$ da tanımlı (23.34) deki gibi $\overline{G} : [0,1]^2 \to GL(l_2(H)$ ve

$$\overline{G}(0,x)(u_k)_{k=1}^{\infty} = (exp((-1)^k 2\pi ix)u_k)_{k=1}^{\infty}, \tag{23.37}$$

$$\overline{G}(1,x) = Id, \quad \overline{G}(y,0) = \overline{G}(y,1) \forall x, y \in [0,1]$$

özelliğinde bir homotopinin olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $l_2(H)$'ı çift ve tek parçalar olmak üzere

$$D : v \in l_2(H) \to ((v_{2i-1}, (v_{2i})) \in l_2(H) \oplus l_2(H) \longleftrightarrow H \oplus H \tag{23.38}$$

parçalara ayırabiliriz ve bu durumda $l_2(H)$'nın her kopyası(aynı izometrik eşyapı dönüşümü ile) sağdaki H dır. Bu durumda önceki problemdeki homotopi

$$\overline{G}(x,y) = D^{-1}G(y,x)D \tag{23.39}$$

biçimindedir ve bu istediğimizdir.

Problem 10.7. Eilenberg Hilesi) Ayrılabilir bir Hilbert uzayı için homotopi inşa ediniz. Yani,$l_2(H)$ da tanımlı (23.34) deki gibi bir $G : [0,1]^2 \to GL(l_2(H))$ ve (21.32) deki gibi, $G(0,x) = L(x)$, $G(1,x) = Id$ ve her $x, y \in [0,1]$ için $G(y,0) = G(y,1)$ sağlayan sürekli bir dönüşüm inşa ediniz.

İp ucu: Öğrendiklerimiz toparlıyacağız-herşeyi $[0,1]$ aralığında olacak şekilde ayarlıyabiliriz. Önce H uzayını kendisinin iki kopyasına bölebiliriz. (23.30) de L den $M(0,x)$ gecebiliriz. İkinci H parçasından bir $l_2(H)$ bölerek önceki problemdeki gibi bir tartışma ile bu parça üzerinde birim dönüşümünü $exp(\pm 4\pi ix)$ ile çarparak alterne eden(terimleri işaret değiştiren) terimler olarak, önce - işareti ile başlıyoruz, yazabiliriz. Artık $H \oplus l_2(H)$ uzayındayız. Terimleri yeniden dizmek bize yine $l_2(H)$ uzayında çalışma olanağı verir. Bu işlemler sonrasında eğrimiz + işaretli olarak başlayan ve işaret değiştirerek $exp(\pm 4\pi ix)$ ile çarpma haline gelir. Sonrasında yine, bir önceki problemde olduğu gibi, birim (kapalı eğriler üzerinden) parçalanmış olur.

Çözüm. Yukarıdaki değişkenleri yeni baştan ayarlıyarak, periyodik aileler üzerinden üç homotopi olduğunu kabul edebiliriz. $H \oplus H$ üzerinde $L(x) = e^{2\pi ix}$ ile aşağıdaki matris arasında

$$\begin{pmatrix} e^{4\pi ix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}. \tag{23.40}$$

$H \oplus l_2(H)$ üzerinde ise $\overline{G}(0,x)$ (23.37) deki gibi olmak üzere

$$(23.41) \quad \begin{pmatrix} e^{4\pi ix}Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

dan

$$\begin{pmatrix} e^{4\pi ix}Id & 0 \\ 0 & \overline{G}(0,x) \end{pmatrix}.$$

ayrışımını yapabiliriz. Daha sonrada

$$(23.42) H \oplus l_2(H) = l_2(H), (u,v) \to w = (w_j), w_1 = u, w_{j+1} = v_j, j \geq 1$$

eşlemesini yaparız. Bu işlem (23.41) deki dönüşüm matrisini $\overline{G}(0,x)^{-1}$ götürür. Aynı ayrışım yöntemi ile bu eğriyi birim matrisine dönüştürebiliriz. Sonuç olarak bu bize bir homotopi verecektir. H üzerinde dönüşümlerin eğrilerini elde etmekte ısrar edersek boylarına bölüp $[0,1]$ üzerine geliriz- her aşamada homotopiyi H uzayına geri götürdüğümüze dikkat ediniz.