MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 5. LİNEER RASYONEL DENKLEMLER VE DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME

Homogen denklemler. Bir $f(x, y)$ fonksiyonu için eğer

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y), \quad \lambda > 0$$

ise, $f(x, y)$'ye m'inci dereceden homogendir denir. Eğer P ve Q aynı dereceden homogen ise P/Q sıfırıncı dereceden homogendir. Gerçekten,

$$\frac{P(\lambda x, \lambda y)}{Q(\lambda x, \lambda y)} = \frac{\lambda^m P(x, y)}{\lambda^m Q(x, y)} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

dir. $g = \frac{P}{Q}$ olsun. $\lambda = \frac{1}{x}, \ x > 0$ alınırsa

$$g(x, y) = g(\lambda x, \lambda y) = g\left(1, \frac{y}{x}\right) =: f\left(\frac{y}{x}\right)$$

elde edilir. Böylece belirtilen koşullar altında

$$P(x, y)dx = Q(x, y)dy$$

denklemi

(5.1) $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

denklemine denktir. Bu tip bir denklem homogen denklem olarak adlandırılır.

Teorem 5.1. *$y = \phi(x)$, I da (5.1) denkleminin bir çözümü olsun.*

(i) $c \neq 0$ ise $z = \frac{1}{c}\phi(cx)$ fonksiyonu karşı gelen aralıkta $z' = f\left(\frac{z}{x}\right)$ denklemini sağlar.

(ii) $x \neq 0$ ve $f(v) \neq v$ ise $v = y/x$ değişken dönüşümü ile (5.1) denklemi

(5.2) $$\frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x} = d(\log x)$$

denklemine dönüşür.

İspat. Alıştırma olarak bırakılmıştır.

(5.2) denklemi ayrılabilirdir ve çözüm $x = k\exp\left(\int \frac{dv}{f(v)-v}\right)$ ile verilir.

Şimdi diferansiyel denklemlerin önemli bir sınıfı olan ve lineer rasyonel denklemler olarak adlandırılan

(5.3) $$(ax+by)y' - (cx+dy) = 0, \qquad ad-bc \neq 0$$

ya da

(5.3′) $$y' = \frac{cx+dy}{ax+by}$$

biçimindeki denklemleri çalışmak için yukarıdaki sonucu kullanalım.

(5.3) denklemi $f(v) = \frac{c+dv}{a+bv}$ olmak üzere, (5.1) tipindedir. $ad-bc \neq 0$ koşulu $f(v) \neq v$ yi garantiler. Böylece, Teorem 5.1 geçerlidir.

$v = y/x$ değişken değişimi ile, (5.3’)

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{c+dv}{a+bv}$$

denklemine dönüşür. Denklemi değişkenlerine ayırarak,

$$\frac{a+bv}{bv^2+(a-c)v-c}dv + \frac{1}{x}dx = 0$$

yazarız. Bu durumda, çözüm, $v = y/x$ ve k sabit olmak üzere,

$$x = k\exp(-\int \frac{a+bv}{bv^2+(a-c)v-c}dv)$$

şeklindedir.

Değişmez yarıçaplar. Alternatif olarak, (5.1) denklemini

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

kutupsal koordinatlarda da çalışabiliriz. γ çözüm eğrisinin teğet yönündeki açı ve $\psi = \gamma - \theta$ olsun. Böylece,

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \cot\psi = \frac{\cot\gamma\cot\theta + 1}{\cot\theta - \cot\gamma}$$

olur. $\gamma = y' = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(\tan\theta)$ olduğundan,

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{1 + \tan\theta f(\tan\theta)}{f(\tan\theta) - \tan\theta} =: Q(\theta)$$

ortaya çıkar. İntegral alınırsa (5.1) denkleminin çözümü olarak

$$r(\theta) = r(0)\exp\int_0^\theta Q(\theta)d\theta$$

elde ederiz. İkinci taraftaki fonksiyon, $\tan\gamma \neq \tan\theta$, yani $y' \neq \frac{y}{x}$, olduğu sürece, iyi tanımlıdır.

Eğer $r(\theta)$, $Q(\theta)$ nın paydası sıfır olacak şekilde bir çözüm eğrisi ise, (5.1) denklemi $\frac{d\theta}{dr} = 0$ denklemine denktir. Buradan, yarıçaplar (5.1) in özel çözüm eğrileri olup, değişmez yarıçaplar adını alırlar. Bu yarıçaplar $y' = \tan\theta = f(\tan\theta)$ olan $y = (\tan\theta)\,x$ çözümlerdir.

(5.3') lineer rasyonel denklemİ için değişmez yarıçapların eğimleri

$$\tan\theta = \frac{c + d\tan\theta}{a + b\tan\theta}$$

eşitliğini sağlar. Bir başka ifade ile eğimler

$$b\ \tan^2\theta + (a-d)\tan\theta - c = 0$$

ikinci derece denkleminin kökleridir.

Eğer $r = g(\theta)$, (5.1) in bir çözümü ise $v = \lambda g(\theta)$ da çözümdür. Gerçekten, çözüm eğrisi $(x,y) \to (\lambda x, \lambda y)$ benzerlik dönüşümü altında değişmezdir. Yorumlamak istersek, herhangi komşu iki değişmez yarıçap arasındaki daire dilimi geometrik olarak benzerdir. Bu gerçek, çözüm eğrileri çizmekte yararlıdır.

Homogen denklemlerin bir başka örneğini tartışalım.

Örnek 5.2. Eğer $xy \neq x^2$ ise $(xy - x^2)y' = y^2$ denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{(y/x)^2}{y/x - 1}$$

olarak yazılabilir. Yani denklem $f(v) = \frac{v^2}{v-1}$ olmak üzere (5.1) biçimindedir. $f(v) = v$ sadece $v = 0$ çözümüne sahiptir. Buradan $y = 0$ elde edilir. Eğer $xv \neq 0$ ise, çözüm $y = \log|kxv|$ biçimindedir. Burada k bir sabittir. Mutlak değer kaldırılırsa

$$y = x\log(ky) \text{ veya } ky = cx\log(ky)$$

dir.

Bazı ikinci mertebeden denklemler. İkinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çoğu uygun bir dönüşümle birinci mertebeden denklemlere indirgenebilir.

Öncelikle ikinci mertebeden

$$y'' = f(x, y') \tag{5.4}$$

denklemini göz önüne alalım. Yani, denklem açık olarak y bağımlı değişkenini içermesin. $v = y'$ olsun. $y'' = (y')' = v' = \frac{dv}{dx}$ olduğundan (5.4) denklemi birinci mertebeden

$$v' = f(x, v)$$

denklemine indirgenir. Eğer bu denklem v ye göre çözülebilir ise, o zaman y, $y' = v$ eşitliğinden integral alarak elde edilir.

Alıştırma. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözünüz:

1. $x^2y'' + 2xy' - 1 = 0$ 2. $y'' + xy'^2 = 0$ 3. $x^2y'' = y'^2,\ x > 0$

Şimdi ikinci mertebeden

$$y'' = f(y, y') \tag{5.5}$$

denklemini göz önüne alalım. Yani, denklem açık olarak x bağımsız değişkenini içermesin.

$v = y'$ olsun. (5.5) denklemi, y bağımsız değişken olmak üzere birinci mertebeden bir denklem olarak yazılabilir. Gerçekten, zincir kuralı ile

$$y'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}.$$

dir. Bunu (5.5) de kullanırsak,

$$v\frac{dv}{dy} = g(y, v)$$

denklemini elde ederiz. Birinci mertebeden denklem çözülürse, v yi y nin fonksiyonu olarak elde ederiz. Bu durumda, $\frac{dy}{dx} = v$ denklemi çözülerek y elde edilir.

$v\frac{dv}{dy}$ ifadesi, $\frac{dv}{dx}$ ifadesinden daha gizemlidir. Çünkü, diferansiyel denklemde y, x in fonksiyonu gibi düşünülmekte ve zincir kuralında bağımsız değişken olarak işlem görmektedir. Bütünlüğü sağlamak1 için bir matematiksel açıklamayı ekleyelim. Düşünce, f türevlenebilir fonksiyon ise, u bir bağımsız değişken ya da bir başka x in $\phi(x)$ türevlenebilir fonksiyonuysa, $df(u)$ nun aynı formda olmasıdır. Şöyle ki,

$$d\, f\big(\phi(x)\big) = f'\big(\phi(x)\big)\phi'(x)dx = f'(u)du$$

dir.

$y = \phi(x)$, (5.5) in çözümü olsun. O zaman

$$\phi''(x) = g(\phi(x), \phi'(x)) \tag{5.6}$$

dir. $v = \phi'(x)$ ve $dv = \phi''(x)\, dx$ kullanılırsa, $xdv = g(y, v)dy$ diferansiyel formdaki denklem

$$\phi'(x)\phi''(x)dx = g(\phi(x), \phi'(x))\phi'(x)dx \tag{5.7}$$

şeklini alır. (5.6) ile (5.7) karşılaştırılırsa $\phi'(x)dx$ çarpanından dolayı farklıdırlar. Buradan, eğer $\phi'(x) \neq 0$ ise (5.5) denklemi $v\, dv = g(y, v)dy$ denklemine denktir. (Eğer $\phi'(x)$ in sıfırları ayrık ise, bu ayrık sıfırlar dışında (5.6), (5.7) ye denktir. Bu durumda, süreklilikten dolayı (5.6) her yerde sağlanır.

<u>Alıştırma.</u> Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözünüz:

1. $yy'' + y'^2 = 0$ 2. $y'' + yy'^3 = 0$ 3. $2y^2y'' + 2yy'^2 = 1$.

1 Diferansiyel formlar üzerine olgunlaşmamış bilgi gerektiriyor.