MIT Açık Ders Malzemeleri

http://ocw.mit.edu

8.333 İstatistiksel Mekanik I: Parçacıkların İstatistiksel Mekaniği

2007 Güz

Değerlendirme Problemleri

Birinci sınıf içi sınav **26/09/07** Çarşamba günü, **14:30 – 16:00** arası yapılacaktır. **21/09/07** Cuma günü sınav değerlendirmesiyle uygulama saati olacaktır.

Sınav kapalı kitaptır, ama isterseniz tek sayfa formül kağıdı getirebilirsiniz. Sınav tamamen aşağıdaki problemlerin bir altkümesinden oluşacaktır. Dolayısıyla, bu problemlerle tanışık ve rahatsanız, sürprizlere yer olmayacaktır!

****

Aşağıdaki bilgileri yararlı bulabilirsiniz:

Fiziksel Sabitler

Elektron kütlesi	$m_e \approx 9.1 \times 10^{-31} kg$	Proton kütlesi	$m_p \approx 1.7 \times 10^{-27} kg$
Elektron Yükü	$e \approx 1.6 \times 10^{-19} C$	Planck sab./2π	$\hbar \approx 1.1 \times 10^{-34} Js^{-1}$
Işık Hızı	$c \approx 3.0 \times 10^{8} ms^{-1}$	Stefan sabiti	$\sigma \approx 5.7 \times 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$
Boltzmann sabiti	$k_B \approx 1.4 \times 10^{-23} JK^{-1}$	Avogadro sayısı	$N_0 \approx 6.0 \times 10^{23} mol^{-1}$

Çevrim Çarpanları

$1atm \equiv 1.0 \times 10^5 Nm^{-2}$ $\quad$ $1\mathring{A} \equiv 10^{-10} m$ $\quad$ $1eV \equiv 1.1 \times 10^4 K$

Termodinamik

$dE = TdS + dW$ $\quad$ Gaz için: $dW = -PdV$ $\quad$ Tel için: $dW = Jdx$

Matematiksel Formüller

$\int_0^\infty dx\ x^n\ e^{-\alpha x} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-ikx - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right] = \sqrt{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right]$ $\qquad$ $\lim_{N\to\infty} \ln N! = N \ln N - N$

$\left\langle e^{-ikx}\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle$ $\qquad$ $\ln\left\langle e^{-ikx}\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c$

$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ $\qquad$ $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

d boyutta birim kürenin yüzey alanı $\qquad$ $S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{(d/2-1)!}$

1. *Yüzey gerilimi*: İki faz arasındaki arayüzlerin termodinamik özellikleri, yüzey gerilimi S olarak adlandırılan durum fonksiyonu tarafından belirtilir. Yüzey gerilimi, yüzey alanını $dW = SdA$ formülünde dA kadar arttırmak için gerekli olan iş cinsinden tanımlanır.

(a) Yarıçapın sonsuzküçük değişimiyle yüzey gerilimine karşı yapılan işi düşünerek, R yarıçaplı küre şeklindeki bir su damlasının içindeki basıncın, dış basınçtan $2S/R$ kadar büyük olduğunu gösteriniz. R yarıçaplı sabun köpüğünün içindeki hava basıncı nedir ?

(b) Bir su damlası, bir katı yüzeyde yoğuşur. Söz konusu üç yüzey gerilimi vardır, S_{aw}, S_{sw}, ve S_{sa}, burada a, s, ve w, sırasıyla hava, katı ve suyu temsil eder. Temas açısını hesaplayınız ve bir su filmi oluşumu (tam ıslatma) için koşulu bulunuz.

(c) "Büyük" cisimler aleminde, kütleçekimi baskın olan kuvvettir, "küçük" mesafelerde ise, yüzey gerilimi etkileri tümüyle önemlidir. Oda sıcaklığında suyun yüzey gerilimi $S_o \approx 7 \times 10^{-2} Nm^{-1}$'dir. "Büyük" ve "küçük" davranışları ayıran tipik uzunluk ölçeğini tahmin ediniz. Bu uzunluk ölçeğinin önemli olduğu birkaç örnek veriniz.

****

2. *Sürfaktanlar*: Sabun veya şampuandaki gibi sürfaktan molekülleri, suda çözünmek yerine hava-su yüzeyinde dağılmayı tercih ederler. Bunu görmek için, su yüzeyinde bir saç kılını yüzdürün ve yakınlarında, bir parça sabunla yavaşça suya dokunun. (Bu, aynı zamanda bir parça sabunun bir oyuncak kağıt tekneyi hareket ettirebilmesinin nedenidir.)

(a) Hava-su yüzey gerilimi S_o (sıcaklıktan bağımsız olduğu kabul edilen), N sürfaktan parçacıklarının sayısı ve A alan olmak üzere, kabaca Nk_BT/A kadar azalır. Bu sonucu nitel olarak açıklayınız.

(b) Temiz bir yüzey üzerine bir su damlası yerleştirin. Damlanın yüzeyine küçük bir parça sabunla hafifçe dokunurken, hava-su yüzeyi temas açısına ne olduğunu gözleyiniz, ve gözlemi açıklayınız.

(c) Daha dikkatli gözlemler, daha yüksek sürfaktan yoğunluklarında şunu verir,

$$\left.\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial A}\right|_T = \frac{Nk_BT}{(A-Nb)^2} - \frac{2a}{A}\left(\frac{N}{A}\right)^2 \quad , \quad \text{ve} \quad \left.\frac{\partial T}{\partial \mathcal{S}}\right|_A = -\frac{A-Nb}{Nk_B};$$

burada a ve b sabittir. $S(A,T)$'nin ifadesini elde ediniz, ve a ve b ile tanımlanan düzeltmelerin kökenini açıklayınız.

(d) $C_S - C_A$ için $\frac{\partial E}{\partial T}|_A = \frac{\partial E}{\partial T}|_S$ olduğunda, $\frac{\partial E}{\partial A}|_T$, S, $\frac{\partial S}{\partial A}|_T$, ve $\frac{\partial T}{\partial S}|_A$ cinsinden bir ifade bulunuz.

****

3. *Sıcaklık ölçekleri*: İdeal gaz sıcaklık ölçeği Θ ve termodinamik ölçek T'nin denkliğini, bir ideal gaz üzerine bir Carnot çevrimi uygulayarak ispatlayınız. İdeal gaz $PV = Nk_B\Theta$ denklemini sağlar ve içsel enerjisi E sadece Θ'nın bir fonksiyonudur. Ancak, $E \propto \Theta$ *olduğunu varsayamazsınız*. Aşağıdaki gibi devam etmek isteyebilirsiniz:

(a) Isı alışverişleri Q_H ve Q_C'yi Θ_H, Θ_C, ve hacim genleşme çarpanlarının fonksiyonu olarak hesaplayınız.

(b) Adyabatik bir işlemde hacim genleşme çarpanını θ'nın bir fonksiyonu olarak hesaplayınız.

(c) $Q_H/Q_C = \Theta_H/\Theta_C$ olduğunu gösteriniz.

****

4. *Durum Denklemleri*: Durum denklemi içsel enerjinin biçimini, aşağıdaki örneklerdeki gibi sınırlandırır.

(a) $dE = TdS - PdV$'den başlayarak, $PV = Nk_BT$ durum denkleminin, aslında E'nin sadece T'ye bağımlı olmasını gerektirdiğini gösteriniz.

(b) Sadece sıcaklığa bağımlı olan bir içsel enerjiyle tutarlı en genel durum denklemi nedir?

(c) Bir van der Waals gazında, C_V'nin sadece sıcaklığın bir fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

****

5. *Clausius-Clapeyron denklemi* kaynama noktasının basınçla değişimini tanımlar. Genellikle, birlikte varolduklarında gaz ve sıvı fazların kimyasal potansiyellerinin aynı olması koşulundan türetilir. Alternatif bir türetim için, bir mol su kullanarak bir Carnot makinesi ele alalım. Kaynak (P, T)'de, latent ısı L verilip su buhara çevrilir. Bu işlemler bağlantılı bir V hacim artışı vardır. Basınç adyabatik olarak $P - dP$'ye düşürülür. Gider $(P - dP, T - dT)$'de buhar tekrar suya yoğuşur.

(a) Makinenin iş çıktısının $W = VdP + \mathcal{O}(dP^2)$ olduğunu gösteriniz. Buradan, aşağıdaki Clausius-Clapeyron denklemini elde ediniz.

$$\left.\frac{dP}{dT}\right|_{\text{kaynama}} = \frac{L}{TV}. \qquad (1)$$

(b) Şu iddianın sorunu nedir?: “Bir mol suyu buhara çevirmek için kaynakta verilen Q_H ısısı $L(T)$’dir. Giderde bir mol buharı suya yoğuşturmak için $L(T-dT)$ verilir. Aradaki fark $dTdL/dT$, $W = VdP$ işine, ve denklem (1)’den dolayı LdT/T’ye eşit olmalıdır. Buradan, $dL/dT = L/T$ ve sonucunda L ile T orantılı olmalıdır!”

(c) L’nin yaklaşık olarak sıcaklıktan bağımsız, ve hacim değişiminde, ideal gaz olarak alınan, yani $V = Nk_BT/P$ buhar hacminin baskın olduğunu varsayınız. $P(T)$’yi elde etmek için denklem (1)’in integralini alınız.

(d) Bir kasırga, yukarıda tanımlanan makineye biraz benzer işler. Su okyanusun ılık yüzeyinde buharlaşır, buhar atmosferde yükselir, ve yüksek ve daha soğuk irtifalarda suya yoğuşur. Coriolis kuvveti havanın yukarı doğru emilimini spiral harekete dönüştürür. (Buz ve kaynayan su kullanarak çay fincanında küçük bir fırtına koparabilirsiniz.) Ilık okyanus yüzeyinin ve yüksek irtifa sıcaklıklarının tipik değerleri, sırasıyla $80^0F\,(300^0K)$ ve $-120^0F\,(189^0K)$’dır. Ilık su yüzey tabakası yeterli su buharı sağlayabilmek için en az 200 feet (61 m) kalınlığında olmalıdır, çünkü kasırganın, kendini koruyabilmek için saate yaklaşık 90 milyon ton su buharını yoğuşturması gereklidir. Böyle bir kasırganın mümkün olan maksimum verimliliği ve güç çıktısını kestiriniz. (Suyun buharlaşmasının latent ısısı $2.3 \times 10^6 Jkg^{-1}$ civarındadır.)

(e) Yerçekiminden dolayı atmosfer basıncı $P(h)$ yükseklik h ile azalır. (ideal bir gaz gibi davranan) dh kalınlığında bir hava tabakasının üstüne etkiyen kuvvetleri dengeleyerek, $P(h) = P_0 \exp(-mgh/kT)$ olduğunu gösteriniz, burada m hava moleküllerinin ortalama kütlesidir.

(f) Yukarıdaki sonuçları kullanarak, Everest dağının tepesinde $(h \approx 9\text{km})$ suyun kaynama sıcaklığını tahmin ediniz. Suyun buharlaşmasının latent ısısı $2.3 \times 10^6 Jkg^{-1}$ civarındadır.

****

6. *Cam*: Sıvı kuvars, yavaşça soğutulursa, T_m sıcaklığında kristalleşir, ve L latent ısısı verir. Daha hızlı soğutma koşullarında, sıvı aşırısoğutulur ve camsı hale gelir.

(a) Kuvarsın her iki fazı da neredeyse sıkıştırılamaz olduğundan iş girdisi yoktur ve içsel enerjideki değişimler $dE = TdS + \mu dN$ eşitliğini sağlar. Kapsamsallık koşulunu kullanarak E, T, S, ve N cinsinden μ için bir ifade elde ediniz.

(b) α ve β sabitler olmak üzere, kristal kuvarsın ısı sığası yaklaşık $C_X = \alpha T^3$'tür, camsı kuvars için ise, kabaca $C_G = \beta T$'dir.

Termodinamiğin üçüncü yasasının hem kristal hem camsı fazlar için geçerli olduğunu varsayarak, $T \leq T_m$ sıcaklıklarında bu iki fazın entropilerini hesaplayınız.

(c) Sıfır sıcaklıkta, cam ve kristal kuvarsın yerel bağ yapıları benzerdir, böylece yaklaşık olarak aynı içsel enerji E_0'a sahiptir. $T \leq T_m$ sıcaklıklarında, iki fazın içsel enerjilerini hesaplayınız.

(d) İki faz arasında termal denge koşulunu kullanarak, denge erime sıcaklığı T_m'yi α ve β cinsinden hesaplayınız.

(e) Latent ısı L'yi α and β cinsinden hesaplayınız.

(f) Önceki şıkta bulunan sonuç doğru mudur? Değil ise, bu sonuca götüren adımlardan hangisinin yanlış olması çok muhtemeldir?

****

7. *Karakteristik fonksiyonlar*: Şu olasılık yoğunluğu fonksiyonlarının karakteristik fonksiyonlarını, ortalama ve varyanslarını hesaplayınız.

(a) *Tekdüze* $p(x) = \frac{1}{2a}$ eğer $-a < x < a$, ve $p(x) = 0$ aksi taktirde;

(b) *Laplace* $(x) = \frac{1}{2a} \exp\left(-\frac{|x|}{a}\right)$;

(c) *Cauchy* $p(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$

(d) *Rayleigh* $(x) = \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$,

(e) *Maxwell* $p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2}{a^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$

****

8. *Tchebycheff eşitsizliği*: Ortalaması λ ve varyansı σ^2 olan, $(-\infty < x < \infty)$ için herhangi bir olasılık yoğunluğu $p(x)$'i ele alalım. λ'dan uzaklığı $n\sigma$'dan fazla olan sonuçların toplam olasılığının $1/n^2$'den daha az olduğunu gösteriniz, yani

$$\int_{|x-\lambda|\geq n\sigma} dx p(x) \leq \frac{1}{n^2}.$$

İpucu: σ^2'yi tanımlayan integralden başlayın, ve onu, $|x-\lambda| > n\sigma$ ve $|x-\lambda| < n\sigma$'ya karşılık gelen parçalara bölün.

****

9. *En iyi seçim*: Pek çok özel populasyonda, üyeleri arasında az değişkenlik vardır. Bu optimal seçimin doğal bir sonucu mudur?

(a) $\{r_\alpha\}$, herbiri bir olasılık yoğunluğu $p(r)$'den $r \in [0,1]$ olmak üzere, bağımsızca seçilmiş n tane rassal sayı olsun. Bu kümenin en büyük değeri için, yani $x = \max\{r_1, \cdots, r_n\}$ için olasılık yoğunluğu $p_n(x)$'i hesaplayınız,

(b) Eğer herbir r_α 0 ile 1 arasında tekdüze dağılmış ise, x'in ortalama ve varyansını n'nin bir fonksiyonu olarak hesaplayınız, ve büyük n için davranışını yorumlayınız.

****