8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

III.F Gaussiyan Modeli (Doğrudan Çözüm)

Sonraki bölümde, RG yaklaşımı, *Gaussiyan modeline* uygulanacak. Daha sonraki kıyaslamalar için, burada, bu problemin doğrudan çözümünü sunacağız. Gaussiyan modeli, Landau-Ginzburg açılımında sadece ikinci mertebeden terimleri tutarak elde edilir. Elde edilen bölüşüm fonksiyonu:

$$Z = \int \mathcal{D}\vec{m}(\mathbf{x}) \exp\left\{-\int d^d\mathbf{x}\left[\frac{t}{2}m^2 + \frac{K}{2}(\nabla m)^2 + \frac{L}{2}(\nabla^2 m)^2 + \cdots - \vec{h}\cdot\vec{m}\right]\right\} \tag{III.49}$$

Açıkça, model, sadece $t \geq 0$ için iyi tanımlıdır, çünkü, $t < 0$ için kararlılığı sağlayacak m^4 terimi yoktur. Bölüşüm fonksiyonunun yine de $t = 0$'da bir tekilliği vardır, ve bunu, düzensiz taraftan bir faz geçişini temsil ettiğini düşünebiliriz.

İkinci mertebeden şekli, Gauss integrallerinin kuralları kullanılarak kolayca hesaplanabilir. İlk önce, Fourier modları kullanılarak, çekirdek köşegenleştirilir: L boyutundaki sonlu bir sistemde, izin verilen $\mathbf{q}$ değerleri, $2\pi/L$ aralığı ile kesikleştirilir. En büyük $\mathbf{q}$ değeri, ağ aralığı ile sınırlanmıştır, ve şekli, altta yatan ağ tarafından belirlenen *Brilluoin Bölgesi*ne hapsedilmiştir. Aslında,

$$\begin{cases} \vec{m}(\mathbf{q}) = \int d^d\mathbf{x} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\vec{m}(\mathbf{x}) \\ \vec{m}(\mathbf{x}) = \sum_q \frac{e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{V}\vec{m}(\mathbf{q}) = \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\vec{m}(\mathbf{q}) \end{cases} \tag{III.50}$$

alarak Fourier modlarının biraz farklı bir boylamlanmasını kullanacağız, ve hacim çarpanlarını dikkatle takip edeceğiz. (Gerçekte, Fourier modlarını göstermek için, $\tilde{m}_i(\mathbf{q})$ gibi farklı bir sembol kullanmamız lazım. Kısa olsun diye, aynı sembolü kullanıyoruz, ancak $\mathbf{q}$ argümanını, Fourier dönüştürülmüş fonksiyonu göstermesi için, açıkca koyuyoruz.) Son dönüşüm, sonsuz boyut limitinde ($L \to \infty$) geçerlidir, ve V sistemin hacmidir.

Hamiltoniyen'i, Fourier modları cinsinden ifade edince,

$$\int d^d\mathbf{x} m(\mathbf{x})^2 = \int d^d\mathbf{x} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} \frac{e^{-i(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\cdot\mathbf{x}}}{V^2}\vec{m}(\mathbf{q})\cdot\vec{m}(\mathbf{q}') = \sum_q \frac{\vec{m}(\mathbf{q})\cdot\vec{m}(-\mathbf{q})}{V} \tag{III.51}$$

gibi ifadelerle karşılaşırız. Son ifade, $\mathbf{x}$ integralinin $\mathbf{q}+\mathbf{q}' = \mathbf{0}$ değilse sıfır olmasından elde edilmiştir, ki bu durumda V'ye eşittir. Benzer işlemlerden sonra

$$\beta\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{q}} \left(\frac{t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots}{2V}\right)|m(\mathbf{q})|^2 - \vec{h}\cdot\vec{m}(\mathbf{q} = \mathbf{0}) \tag{III.52}$$

Hamiltoniyen'ini elde ederiz. Denklem III.50'deki boylamlanma tercihi ile, her Fourier modu başına dönüşümün Jakobiyeni $1/\sqrt{V}$ olur, ve bölüşüm fonksiyonu

$$Z = \prod_{\mathbf{q}} V^{-n/2} \int d\vec{m}(\mathbf{q}) \exp\left[-\frac{t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots}{2V}|m(\mathbf{q})|^2 + \vec{h}\cdot\vec{m}(\mathbf{q} = 0)\right] \tag{III.53}$$

olur. $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ için integral

$$Z_0 = V^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{m}(\mathbf{0}) \exp\left[-\frac{t}{2V}|m(\mathbf{0})|^2 + \vec{h}\cdot\vec{m}(\mathbf{0})\right] = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{n/2} \exp\left[\frac{Vh^2}{2t}\right] \quad \text{(III.54)}$$

olur. $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ için integrallari de aldıktan sonra,

$$Z = \exp\left[\frac{Vh^2}{2t}\right] \prod_{\mathbf{q}} \left(\frac{2\pi}{t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots}\right)^{n/2} \quad \text{(III.55)}$$

elde ederiz. Toplam modların sayısı, asıl ağ noktalarının sayısına eşittir. $(2\pi)^{nN/2}$'den gelen sabit bir faktör dışında, serbest enerji

$$f(t,h) = -\frac{\ln Z}{V} = \frac{n}{2}\int_{B.B.} \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \ln(t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots) - \frac{h^2}{2t} \quad \text{(III.56)}$$

olarak elde edilir.

Denklem III.56'daki integral Brilliouin bölgesi üzerindendir, ki a aralıklı hiperkubik bir ağ için, merkezi orijin olan, $2\pi/a$ kenarlı bir küptür. Ancak, tekilliklerin $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ civarındaki uzun dalgaboylu modlardan kaynaklanmasını bekleriz. Briliouin bölgesinin kenarlarına yakın bölgelerden gelen katkılar, açıkça analitiktir, çünkü sonlu bir q^2 için, logaritma t'nin üstelleri cinsinden açılabilir. Bu yüzden, $t \to 0$'daki tekilliği elde etmeyi kolaylaştırmak için, Brillouin bölgesini şeklini yaklaşık olarak $\Lambda \sim \pi/a$ çapında bir hiper küreye benzeteceğiz. Integralin küresel simetrisi,

$$f_{\text{tekil}}(t,h) = \frac{n}{2}K_d \int_0^{\Lambda} dq d^{d-1} \ln(t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots) - \frac{h^2}{2t} \quad \text{(III.57)}$$

yazmamıza olanak tanır, burada $K_d \equiv S_d/(2\pi)^d$'dir ve S_d d-boyutlu katı açıdır. t integralinin t'ye göre öncül bağımlılığı, q'yu $\sqrt{t/K}$ çarpanıyla ölçeklersek elde edilebilinir:

$$f_{\text{tekil}}(t,h) = \frac{n}{2}K_d \left(\frac{t}{K}\right)^{d/2} \int_0^{\Lambda\sqrt{K}/\sqrt{t}} dx x^{d-1} \left[\ln t + \ln(1 + x^2 + Ltx^4/K^2 + \cdots)\right] - \frac{h^2}{2t} \quad \text{(III.58)}$$

t'de analitik katkıları ihmal edersek, serbest enerjinin öncül tekilliği

$$f_{\text{tekil}}(t,h) = -t^{d/2}\left[A + \frac{h^2}{2t^{1+d/2}}\right] \equiv t^{2-\alpha} g_f(h/t^{\Delta}) \quad \text{(III.59)}$$

olarak yazılabilir.

Yüksek dereceli gradyanlar, yani L, $\cdots$, ile orantılı olan terimler, denklem III.59'daki tekil davranışı etkilemez. $t = 0^+$'da $h = 0$ noktasına yaklaşırken, serbest enerjinin tekil kısmı, üstelleri

$$\alpha_+ = 2 - d/2 \quad , \quad \Delta = 1/2 + d/4 \quad \text{(III.60)}$$

olan ölçeklenme şekliyle tanımlanır. $t < 0$'daki düzenli faz kararlı olmadığı için, β üsteli tanımlı değildir. Ancak, $\xi \propto \partial^2 f/\partial h^2 \propto 1/t$ alınganlığı, γ_+ üsteli ile ıraksar.

III.G Gaussiyan Modeli (Renormalizasyon Gurubu)

Gaussiyan modelin RG'si en rahatlıkla Fourier Mode'lar cinsinden yapılır. Amaç

$$Z \sim \int \mathcal{D}\vec{m}(\mathbf{q}) \exp\left[-\int_0^\Lambda \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\left(\frac{t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots}{2}\right)|m(\mathbf{q})|^2 + \vec{h}\cdot\vec{m}(\mathbf{0})\right] \tag{III.61}$$

bölüşüm fonksiyonunu RG kullanarak üç adımda dolaylı olarak hesaplamaktır. Brillouin bölgesinin, Λ çaplı bir hiperküre ile yaklaşıklık yapıldığına dikkat edin.

1. *Kabalaştır:* $a < x < ba$ ölçeğindeki dalgalanmaları ortadan kaldırırmak; $\Lambda/b < q < \Lambda$ dalgaboylu Fourier modlarının kaldırmaya benzer. Dolayısıyla, momentumları iki alt kümeye ayıracağız,

$$\{\vec{m}(\mathbf{q})\} = \{\vec{\sigma}(\mathbf{q}^>)\} \oplus \{\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}^<)\} \tag{III.62}$$

ve

$$Z = \int \mathcal{D}\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}^<) \int \mathcal{D}\vec{\sigma}(\mathbf{q}^>) e^{-\beta\mathcal{H}[\tilde{\vec{m}},\vec{\sigma}]} \tag{III.63}$$

olarak yazacağız. Gaussiyen modelde iki mod kümesi birbirinde ayrıştığı için, integraller basittir ve

$$\begin{aligned} Z \sim \exp\left[-\frac{n}{2}V\int_{\Lambda/b}^{\Lambda}\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\ln(t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots)\right] \times \\ \int \mathcal{D}\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}^<) \exp\left[-\int_0^{\Lambda/b}\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\left(\frac{t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots}{2}\right)|\tilde{m}(\mathbf{q})|^2 + \vec{h}\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{0})\right] \end{aligned} \tag{III.64}$$

2. *Ölçekle:* $\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}^<)$ modları için bölüşüm fonksiyonu, üst sınırın λ/b'ye azalması dışında, orijinaline benzer, ki bu da çözünürlükteki kabalaştırmanın yansımasıdır. Gerçek uzaydaki $\mathbf{x}' = \mathbf{x}/b$ ölçeklemesi *momentum uzayı*ndaki $\mathbf{q}' = b\mathbf{q}$ ölçeklemesine denktir, ve sınırı, ilk değerine eşitler. Yeniden ölçeklenmiş bölüşüm fonksiyonu

$$\begin{aligned} Z = e^{-V\delta f_b(t)} \times \int \mathcal{D}\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}') \\ \exp\left[-\int_0^\Lambda \frac{d^d\mathbf{q}'}{(2\pi)^d} b^{-d}\left(\frac{t + Kb^{-2}q'^2 + Lb^{-4}q'^4 + \cdots}{2}\right)|\tilde{m}(\mathbf{q}')|^2 + \vec{h}\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{0})\right] \end{aligned} \tag{III.65}$$

olur.

3. *Renormalize et:* Gerçek uzaydaki RG'nin son adımı, mıknatıslanmayı renormalize etmektir, $\vec{m}'(\mathbf{x}') = \tilde{\vec{m}}(\mathbf{x}')/\zeta$. Alternatif olarak, Fourier modlarını $\vec{m}'(\mathbf{x}') = \tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}')/z$ olarak renormalize edebiliriz, ve sonuç olarak

$$Z = e^{-V\delta f_b(t)} \times \int \mathcal{D}\tilde{\vec{m}}'(\mathbf{q}')$$
$$\exp\left[-\int_0^\Lambda \frac{d^d\mathbf{q}'}{(2\pi)^d} b^{-d} z^2 \left(\frac{t + Kb^{-2}q'^2 + Lb^{-4}q'^4 + \cdots}{2}\right) |\tilde{m}(\mathbf{q}')|^2 + z\vec{h}\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{0})\right] \tag{III.66}$$

elde ederiz. (Mıknatıslanmayı gerçek ve Fourier uzayında yeniden ölçekleme için kullanılan ζ ve z çarpanlarının farklı olduğuna dikkat edin.)

Denklem III.66, renormalize edilmiş modların, renormalize edilmiş parametreleri

$$\begin{cases} t' &= z^2 b^{-d} t \\ h' &= zh \\ K' &= z^2 b^{-d-2} K \\ L' &= z^2 b^{-d-4} L \\ & \cdots \end{cases} \tag{III.67}$$

olan Gaussian Hamiltoniyene göre dağıldıklarını gösterir. $t = h = 0$ tekil noktası, beklendiği gibi, kendisiyle eşleşir. Bu noktada, salınımları, ölçeklemeden bağımsız yapabilmek için, kalan Hamiltoniyenin değişmediğinden emin olmalıyız. Bu, $K' = K$ yapan ve diğer parametreleri $L, \cdots$ sıfıra ölçekleyen, $z = b^{1+d/2}$ tercihiyle sağlanır. Kritiklikten uzakta, iki önemli yön,

$$\begin{cases} t' &= b^2 t \\ h' &= b^{1+d/2} h \end{cases}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y_t &= 2 \\ y_h &= 1 + d/2 \end{cases} \tag{III.68}$$

olarak ölçeklenir. Bölüm (III.D)'nin sonuçlarını kullanırsak, kritik üsteller

$$\nu = 1/y_t = 1/2,$$
$$\Delta = \tfrac{y_h}{y_t} = \tfrac{1+d/2}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{d}{4},$$
$$\alpha = 2 - d\nu = 2 - d/2$$

olarak, bir önceki bölümdeki doğrudan çözüm ile tutarlı bir şekilde belirlenir.

Serbest nokta Hamiltoniyeni ($t^* = h^* = L^* = \cdots = 0$), gerçek uzayda,

$$\beta\mathcal{H}^* = \frac{K}{2}\int_a d^d\mathbf{x}(\nabla m)^2 \tag{III.69}$$

olur. (integrale a alt simgesi, açıkça yazılmayan, kısa mesafe sınırını belirtmek için konmuştur.) Basit, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ ve $\vec{m}(\mathbf{x}) \mapsto \zeta\vec{m}'(\mathbf{x}')$ ölçeklenmesinde $K \mapsto K' = b^{d-2}\zeta^2 K$ olur. Ölçek bağımsızlığı, $\zeta = b^{1-d/2}$ tercihi ile elde edilir. Kabalaştırma adımını unutursak, $\vec{m}(\mathbf{x})$'in genel bir kuvveti, $(\beta\mathcal{H})^*$'a küçük bir tedirgeme olarak eklenirse,

$$\beta\mathcal{H}^* + u_n\int d^d\mathbf{x} m^n \mapsto \beta\mathcal{H}^* + u_n b^d \zeta^n \int d^d\mathbf{x}' m'^n \tag{III.70}$$

şeklinde davranır, ki bu da tedirgenmelerin

$$u_n' = b^d b^{n\left(\frac{2-d}{2}\right)} u_n, \quad \Longrightarrow \quad y_n = n - d\left(\frac{n}{2} - 1\right) \tag{III.71}$$

olarak ölçeklendiğini söyler. $y_1 = 1 + d/2$ ve $y_2 = 2$ değerleri, denklem III.68'deki y_h ve y_t üstellerini türetir. Daha yüksek mertebeden terimler, daha az önemlidir. Küresel simetrik bir sistemdeki bir sonraki en önemli operatör $y_4 = 4 - d$'dir, ki $d > 4$ için önemsiz, $d < 4$ için önemlidir; $y_6 = 6 - 2d$, sadece $d < 3$ için önemlidir. Gerçekten de, $d > 2$ için, Gaussiyan sabit noktasında pek çok operatör önemsizdir.