



MIT Açık Ders malzemeleri

<http://ocw.mit.edu>

8.01 Fizik I: Klasik Mekanik, Güz 1999

Bu materyallerden alıntı yapmak veya kullanım şartları hakkında bilgi almak için

<http://ocw.mit.edu/terms> ve <http://www.acikders.org.tr> sitesini ziyaret ediniz.

MIT Açık Ders malzemeleri

<http://ocw.mit.edu>

8.01 Fizik I: Klasik Mekanik, Güz 1999

Transkript – Ders 22

Bugün sizlere eliptik yörüngeler ve Kepler'in ünlü yasalarından bahsedeceğim.

İlk olarak, sizinle dairesel yörüngeler hakkında bildiklerimizi kısaca gözden geçirmek istiyorum; bu nedenle dairesel yörüngeler hakkında bildiğimiz her şeyi tahtaya yazdım.

Büyük M kütleli bir cisim etrafında dolanan küçük m kütleli bir cisim var.

Büyük kütleli güneş, küçük kütleli dünya olabilir.

R yarıçapı var ve dairesel.

Oradaki 1 nolu denklemden, bir tur dolanması için gerekli olan zamanın nasıl elde edileceğini biliyoruz.

Zamanı ve küçük m kütleli cisim üzerine etkiyen merkezci kuvveti yerçekimi kuvvetine eşit olarak elde etmiştik.

Ayrıca, yörüngedeki hız, belki de yörüngedeki sürat demem gerekirdi, aynı yaklaşım kullanılarak elde edilmişti.

Daha sonra, mekanik enerjinin korunumunu görmektesiniz.

Kinetik enerji ve potansiyel enerjinin toplamı sabittir, değişmemektedir.

Orada ilk olarak 1 bölü 2 m çarpı v kare şeklinde olan kinetik enerji bileşenini görmektesiniz. Daha sonra potansiyel enerji terimini görmektesiniz.

Sonsuzda potansiyel enerjiyi sıfır olarak tanımlamıştık ve tüm kapalı yörüngelerin negatif toplam enerjiye sahip olmaları bu nedenleydi.

Eğer, toplam enerji pozitif ise yörünge kapalı değildir.

Ve sizler bu ikisini topladığınızda, daha önce tartışmış olduğumuz inanılmaz bir rastlantıyı elde edersiniz.

Çok basit bir cevap elde ederiz.

Kurtulma hızını bu E denklemini sıfıra ayarlayarak elde edersiniz; yani denklemin bu kısmı sıfırdır.

Böylece buradan Büyük M kütleli cismin çekim kuvvetinden kurtulma hızı, bu hızın karekök 2 katından daha büyüktür.

Ve dünyanın yüzeyine yakın yörüngeler için, dünya etrafında dönme periyodunun yaklaşık 90 dakika ve 2 nolu denklemde görmüş olduğunuz hızın ya da süratin değerinin ise yaklaşık sekiz kilometre bölü saniye olduğunu sizlere hatırlatmak istiyorum. Ve bu durumda bu yörüngeden kurtulma hızı 11,2 kilometre bölü saniyedir.

Ve Güneş etrafında dönen Dünya için, periyot yaklaşık 365 gün olacaktır. Yörüngedeki Dünya'nın hızı yaklaşık 30 kilometre bölü saniyededir. Bunlar sadece hafızanızı tazelemek içindi.

Şimdi, dairesel yörüngeler özeldir.

Genelde, kapalı yörüngeler elips şeklindedir. Şunu vurgulamalıyım ki bizim güneş sistemindeki gezegenlerimizin çoğunun yörüngeleri dairesel yörüngelere oldukça yakındır. Fakat tam olarak dairesel değildir.

Ama genel çözümler eliptik yörüngeleri gerektirir.

Ve ilk olarak sizlerle 17. yüzyıldan başlarında Kepler tarafından verilen üç ünlü yasayı tartışmak istiyorum.

Bunlar onun yapmış olduğu dahice beyanlar idi.

İlginç olan şey ise, o bu dahice beyanları ileri sürmeden önce, bunların saçma olduklarını ileri sürmüştü.

Fakat sonunda, üç önemli yasayı elde etti.

Ve ilk önemli yasa yörüngelerin elips olduğudur.

O, daima gezegenlerden bahsetti ve Güneşin odaklardan birinde bulunduğunu söyledi.

Bu Keplerin 1 nolu yasası

Bunlar 1618 yıllarında ifade edilmiştir.

İkinci...

Kepler'in ikinci yasası, oldukça garip ve bunu bulması inanılmaz bir başarıdır.

Eğer bir elips alır ve odak noktasının birine güneşi koyarsanız,

Bu son derece abartılıdır. Çünkü çoğu yörüngenin yaklaşık dairesel yörünge şeklinde olduğunu söyledim.

Ve gezegen buradan buraya belli bir zamanda gider ve bu zamanı gezegenin buradan buraya belli bir zamanda gitmesi ile kıyaslarsanız, bu durumda Kepler, eğer

bu alan ile buradaki alan aynı ise, buradan buraya gitmesi için geçen zamanla, buradan buraya gitmesi için geçen zamanın aynı olduğunu buldu.

Bu fikre ulaşması inanılmaz bir başarıdır.

Ve bu, “eşit alanlar, eşit zamanlar süpürür” olarak adlandırılır.

Şu ya da bu şekilde, burada açısal momentumun korunumu var.

Ve son olarak üçüncü yasası, “eğer bir elipsin yörünge periyodunun karesini alırsanız, bu güneşe olan ortalama mesafenin üçüncü kuvveti ile orantılıdır.”

Ve o, bu sonuçlardan oldukça memnundu ki bunları oldukça neşeli bir şekilde yazdı.

Burada sizlere Kepler’in 1618 yılında elinde olan verileri göstereceğim. Bunların çoğu şüphesiz, astronomlar Tycho Brahe ve diğerleri tarafından elde edilmiştir.

Burada o zamanda bilinen altı gezegeni ve bunların Güneşe olan ortalama uzaklıklarını görmekteyiz ve dünya için 1 dir. Çünkü astronomik birimler ile çalışmaktayız.

Buradaki her şey Dünya’ya olan uzaklığa göre verilmiştir.

Bu 150 milyon kilometredir.

Ve Dünyanın Güneş etrafında dönmesi 365 gün alır; Jüpiter için yaklaşık 12 yıl ve Satürn için yaklaşık 30 yıl.

Ve daha sonra, bu değerlerin üçüncü kuvvetini ve periyot değerlerinin ise karesini alıyor ve bu ikisini bölüyor, ve bu durumda inanılmaz bir şekilde hep aynı sabit oranları buluyor.

Ve bu onun üçüncü yasasıdır.

Üçüncü yasası o dönemde Kepler’in farkında olmadığı ve daha sonra Newton’un birleştirdiği, yerçekiminin eksi ikinci kuvvetine yol açar.

Yerçekimine ters kare ile bağlıdır, fakat o bunun farkına varmamıştı; daha sonra Newton bu kanunu ortaya koydu.

Fakat Kepler sevinçle “ *İlk olarak bir rüya gördüğüme inandım..... Fakat herhangi iki gezegenin periyotları arasındaki oranın, ortalama uzaklıklarının $3/2$ inci kuvveti ile orantılı olduğu kesinlikle doğrudur ve gerçektir.*” yazmaktadır.

Kepler bunu 1619 yılında yazdı.

Yani yörüngeler genelde elips şeklindedir.

Ve şimdi sizlerle, tahtaya elipsler hakkında yazmış olduğum bilgileri gözden geçirmek istiyorum.

Orada elipsi görüyor musunuz?

Büyük M – Dünya ya da Güneş olabilir –

Q noktasında

Elips bir yarı büyük a eksenine sahiptir. Böylece P den A ya olan mesafe – yerberi den yeröteye olan mesafe, $2a$ dır.

Eğer büyük M dünya ise, bu durumda biz en yakın yaklaşımı "yerberi" olarak adlandırırız ve Dünya'dan en uzak noktayı, "yeröte" olarak adlandırırız. Eğer büyük M Güneş olursa o zaman bunları "günberi" ve "günöte" olarak adlandırırız. Ve küçük m kütlelerinin yörüngede olduğunu ve r_Q konum vektörünü görüyorsunuz.

Belli bir v hızına sahip.

Ve böylece toplam mekanik enerji korunur.

Kinetik enerji ve potansiyel enerjinin toplamı değişmez.

İlk terim kinetik enerji, $\frac{1}{2} m v^2$ çarpı v kare ve ikinci terim potansiyel enerji.

Dairesel yörünge için 3 no.lu eşitlikten bir farkı yoktur; dairesel yörüngeler için büyük R sabittir. Oysa burada şimdi küçük r var, ve bu küçük r zamanla değişmektedir.

Ayrıca 5 nolu eşitlikteki v hızı da zamanla değişecektir. Çünkü eliptik yörüngeye sahiptir.

Bu 2 nolu ve 3 nolu denklemler zamanla değişmeyecektir.

Şimdi sizlere ispat etmediğim bir sonucu veriyorum. Bu tam olarak anlamış olduğunuz iki terimden oluşan toplam mekanik enerjidir. Ve bu aynı zamanda eksi $\frac{GMm}{2a}$ dır.

Ve, 3 nolu eşitliği 5 nolu eşitlik ile kıyaslayın. Bu durumda onların baci-kardeş olduklarını göreceksiniz.

Tek değişkenlik daha önceki durumda büyük R yerine, şimdi ise küçük " a " yani yarıbüyük eksen gelmiştir.

Ve eğer, elips etrafında dolanma zamanını hesaplamak istiyorsanız, bu durumda dairesel yörüngeler için, yarıçap yerine yarıbüyük eksen " a " değerinin gelmesinin haricinde 1 nolu eşitlik ile hemen hemen özdeştir.

Ve kurtulma hızını, aynen 4 nolu eşitliği kullanarak hesapladığınız kurtulma hızı yöntemi ile hesaplayabilirsiniz.

Tek yapmanız gereken, toplam enerjiyi sıfır yapmak ve daha sonra 3 nolu ve 5 nolu eşitliği çözmektir. Ve bu elde etmek istediğiniz hızın, sonsuz olması gerektiğini verir. Ve bu dairesel yörünge durumundaki durumdur.

Bu değerler ve denklemler, bugün kullanacağımız değerler ve denklemlerdir.

Ve oldukça dikkate değer ve en kibar şekliyle anlaşılması oldukça zor olan bir şey var.

Eğer aynı yarıbüyük eksene sahip olan çok sayıda çeşitli yörüngeler söz konusu ise, periyot aynıdır enerji aynıdır ve bu asla açık değildir.

Bu bir yörünge, - bunu bir elips olarak düşünün.

Ve bu da başka bir tanesi.

Bu uzaklık, bu uzaklık ile aynı.

Sadece onu bu şekilde çizdim.

Bu 5 ve 6 nolu eşitliğe göre; her iki yörüngenin aynı mekanik enerjiye ve her iki yörüngenin aynı periyoda sahip olması anlamına gelir.

Böylece bu dairesel yörünge etrafında dolanmak için geçen zaman, bunun etrafında dolanmak için geçen zamanla aynıdır ve bu asla açık değildir..

Şimdi bir cisim için çok genel bir başlangıç şartı ile başlamak istiyorum. Küçük m kütleli cisim bir eliptik yörüngededir.

Ve elips hakkında bulmak istediğimiz tüm bilgileri, nasıl elde edebileceğimi görmek istiyorum.

Bu yüzden sadece başlangıç koşullarını veriyorum.

Burada bir elips var, burası P ve burası A noktası.

Eğer bu Dünya'nın etrafında bir elips ise, bu durumda burası yerberi ve burası ise yeröte olacaktır.

Kütle büyük M, bu nokta Q noktası.

Güzel çizgiler çizmek için cetveli alayım.

AP mesafesi $2a$ ya eşittir. " a " yarıbüyük eksendir.

Ve cismimiz burada, kütlesi küçük m.

Ve bu mesafe r_0 a eşit.

Ve bunu, t eşit sıfır anındaki konum vektörü olarak düşünün.

Ve zaman sıfır olduğu anda, cisim burada olduğu anda, bu elips üzerinde bir hıza sahip.

Bu v_0 olsun.

Ve konum vektörü ile v_0 arasında bir açı var, ben bunu φ_0 olarak alıyorum.

Sizlere M yi veriyorum, v_0 'ı veriyorum, r_0 'ı veriyorum, φ_0 'ı veriyorum.

Şimdi sizlere, bu başlangıç koşullarını kullanarak “bu cismin dolanmasının ne kadar zaman alacağını bulabilir miyiz?” diye soruyorum. QP mesafesinin ne olduğunu bulabilir miyiz? Yarı büyük eksenin ne olduğunu bulabilir miyiz? Cisim en yakın nokta olan P noktasında iken hızının ne olduğunu bulabilir miyiz? Bu açı 90 derece ve küçük m kütleli cisim en uzak mesafe olan yerötede olduğunda hızın ne olduğunu bulabilir miyiz? Tüm bunları bulabilir misiniz? Ve cevap evettir.

“a” yarıbüyük eksenini bulmak en kolaydır.

Mekanik enerjinin korunumu olan 5 nolu eşitliğe giderim.

Ve mekanik enerjinin korunumu; toplam enerjinin, kinetik enerji artı potansiyel enerji olduğunu söyler.

Bu 1 bölü 2 m çarpı v_0 kare, bu cisim D noktasındaki kinetik enerji, eksi mMG bölü r_0 olur.

Bu asla değişmez.

Bütün yörünge boyunca aynı kalır; ayrıca bu 5 nolu eşitliğe göre aynı zamanda eksi mMG bölü $2a$ ya eşit olmalıdır.

Ve böylece bir bilinmeyenli, ki bu “a”, bir denkleminiz var, çünkü diğerlerinin tümünü biliyorsunuz, m ler birbirini götürür. Yerçekimi olduğu sürece m ler her zaman birbirini götürür. Böylece sadece “a” bilinmeyeni kalır.

Böylece bu bulunur.

Eğer, toplam enerji pozitif ise, bu durumda bunun tümü pozitifdir, yani “a” negatif olmak zorundadır.

Bu kesinlikle fiziksel olarak mantık dışıdır. Yani bu kapalı yörüngeler için geçerlidir.

Böylece toplam enerjinin (E_{tot}) pozitif olmasına müsaade edilmez.

“a” değerini elde edince, ki bu 5 nolu eşitlikten elde edilir, .eğer, 6 nolu eşitliği uygularsanız, hemen T değerini, yörünge periyodunu, elde edersiniz. Çünkü eşitlikte tek bilmediğiniz “a” dır, fakat şimdi “a” nın ne olduğunu biliyorsunuz.

Böylece, cismin yörünge etrafında dolanmasının ne kadar zaman aldığını biliyoruz.

Ve sonuçları nicel olarak vermeye çalışıyorum.

Bunu, adım adım daha fazla analiz ettikçe, bu olayı Dünya'nın etrafında dolanan birisinin özel bir durumuna uygulayacağım.

Bugün sizlere anlattığım her şey, tüm sayısal örnekler de dahil olmak üzere, sizler için özellikle yazmış olduğum altı sayfalık notlarda var.

Web sayfasında da olacaktır.

Bunu burada yazdırmayacağız- bu kağıt israfıdır.

Sene 1999 senesi, Web'e sahip olmamızın sebebi bu..

Böylece ne kadar not, kaç tane not, ne kadar zamanı notlar için harcamak istediğinize, ne ölçüde konsantre olmak istediğinize ve hangi adımları takip etmeye çalıştığınıza sizler karar vermelisiniz.

Bu size kalmış, ama her şey Web'de var.

Kelimenin tam anlamıyla her şey, yani tüm sayısal örnekler.

Büyük M yi alıyoruz.

Dünyanın kütesini ele alalım. Ve değeri 6 çarpı 10 üzeri 24 kilogram.

Bu benim M değerim.

Sizler M yi biliyorsunuz.

Sizlere r_0 değerini de vereceğim.

Değeri 9000 kilometredir.

Bu D noktasındaki konum.

Sizlere D noktasındaki koşulları veriyorum.

D noktasında hız 9 kilometre bölü saniye. Ve sizlere φ_0 değerini 120 derece olarak veriyorum.

Bu eşitliklerden her şeyi hesaplayabilmeniz gerekir.

Öncelikle, 5 nolu eşitlik yardımıyla, toplam enerjinin gerçekten negatif olduğu konusunda, bu değerleri kullanarak kendinizi ikna edebilirsiniz.

Şüphesiz, eğer toplam enerjiyi pozitif yaparsam, bir elips olmaz. Bu durumda her şey biter.

Eğer enerji negatif ise, elipstir.

5 nolu eşitlik yardımıyla, "a" değerini elde ederim.

Doğru mu? Çünkü bu tek bilinmeyenli bir eşitlik. Ve değerleri orada yerine koyabilirim. Bunları evde kontrol ve teyit edebilirsiniz.

Ve "a" değerini oldukça büyük olarak elde ettim.

Yaklaşık olarak 50000 kilometre.

Bu oldukça büyük.

Neredeyse sonsuz, ama tam değil.

Dikkat ederseniz 9000 kilometreden başladı. Ancak “a” 50000 kilometre oldu.

Bu 2a nın 100.000 kilometre olması demektir.

Neden bu kadar büyük? Aslında sorunun cevabı kurtulma hızında yatıyor.

Bu küçük kütle D konumunda iken, kurtulma hızı, karekök $2MG$ bölü r_0 şeklinde ve değeri 9.4 kilometre bölü saniye.

Onu sonsuz yapmak için 9.4 kilometre bölü saniyeye ihtiyacınız varsa ve elinizde 9 kilometre bölü saniye değerinizi varsa, bunlar birbirine oldukça yakındır.

Yarıbüyük ekseninin, oldukça büyük değerler almasının nedeni budur.

Burada hiç sürpriz yok.

Eğer şimdi 6 nolu eşitliği kullanırsam, bu durumda periyodu bulurum ve cismin Dünya etrafında dolması yaklaşık 31 saat sürer.

Şimdiye kadar her şey çok iyiydi.

Şimdi yerberi ve yerötede durumların ne olduklarını bilmek istiyoruz.

QP mesafesini hesaplayabilir miyiz? P ve A konumlarındaki hızları hesaplayabilir miyiz? Ve şimdi ileri bilgilerimizi kullanıyoruz.

Şimdi böyle sistem için ilk defa açısal momentumun korunumunu uygulayacağız.

Açısal momentum sadece Q noktasında korunumludur.

Diğer noktalarda korunumlu değildir, fakat bu sorun değil.

Tüm istediğim şey, bu Q noktası.

Burası büyük M nin yer aldığı nokta.

Açısal momentumun büyüklüğü nedir? Evet, ilk olara D noktasını ele alalım.

Cisim D noktasında iken, açısal momentumun büyüklüğü, m çarpı v_0 çarpı r_0 çarpı $\sin\phi_0$ dir.

Bu D noktasındaki durum.

Neden burada $\sin\phi_0$ terimi var? Çünkü r ve v arasında vektörel çarpım söz konusu ve vektörel çarpımda açının sinüsü kullanılır.

Böylece bu D noktasındaki durumdur.

P noktasında durum nedir? P noktasında, hız vektörü QP çizgisine diktir, böylece bu açının sinüsü 1 dir.

Böylece, sadece m çarpı v_P çarpı QP elde ederim.

Ve aynı şeyi A noktası için de yapabilirsiniz.

m çarpı v_A çarpı QA yazabilirsiniz.

Bunu ben yapmıyorum.

Birazdan neden bunu yapmadığımı göreceksiniz.

Tabiat oldukça kibardır.

Doğa bana son kısmı bedavaya verecektir.

Yeri gelmişken, bu kütlenin yer aldığı Q noktasındaki açısal momentum korunumludur.

Burada v_P ve QP değerleri bilinmeyen, iki bilinmeyenli bir denklemim var.

Bu verilerle bunu çözmem.

Bundan dolayı başka bir denkleme daha ihtiyacım var.

Eh, tabii ki, başka bir tanesi daha var.

Ayrıca mekanik enerjinin korunumu da söz konusu.

Böylece şimdi, toplam enerjinin korunumlu olması gerektiğini söyleyebiliriz.

P noktası için yazıyorum.

Toplam enerji eşit $\frac{1}{2} m v_P^2$ kare, bu kinetik enerjidir, eksi $\frac{GMm}{r}$ bölü QP şeklindedir.

Bu büyük M ve küçük m arasındaki mesafenin, QP olması durumundaki potansiyel enerjidir.

Bu değerlerde bunun eksi $\frac{GMm}{2a}$ olduğunu biliyoruz.

Bu 5 nolu eşitliğimiz.

Oops! Burada hata yapmışım.

Bunu fark etmiş olabilirsiniz.

Burada olması gereken küçük "m" yi unutmuşum.

Bundan dolayı özür dilerim.

Ve şimdi burada yaşamımızda her iki kanunu da uyguladığımız, büyük an söz konusudur.

Bu mekanik enerjinin korunumudur.

Ve şimdi iki bilinmeyenli iki denklemim var; Q_P ve v_P . Artık her ikisini de elde edebilirim.

Dikkat ederseniz bu ikinci denklem v_P türünden ikinci dereceden bir denklemdir. Böylece iki çözüm elde edeceksiniz.

Birinci çözüm v_P olacak ve bu Q_P mesafesini verecektir.

Diğeri ise v_A olacaktır ve sizlere Q_A mesafesini verecektir.

Neden iki çözüm elde ederiz? Evet, bu sadece aptal bir denklemdir.

Bu denklem, P indisi kullandığımı bilemez.

Burada A indisi de kullanabilirdim ve buraya da Q_A yazabilirdim.

Ki burası yazmamış olduğum kısımdır.

Ve bundan dolayı, bu denklemi çözdüğüm zaman, hem v_P 'yi ve hem de v_A 'yı elde ederim. Çünkü bunlar hız vektörünün konum vektörüne dik olduğu durumlardır.

Ve eğer şimdi sayısal sonuçlarımızı kullanırsam ve sizler için bu ikinci dereceden denklemi çözersem, bu durumda Q_P 'yi bulurum; bunu evde kontrol etmek isteyebilirsiniz, yaklaşık olarak 6.6 çarpı 10 üzeri 3 kilometre çıkar.

Bu, dünyanın yüzeyinden sadece 200 kilometre yukarıda demektir.

Bu düşük yükseklikte, bu yörüngedeki uydu çok uzun kalmayacak ve Dünya'nın atmosferine yeniden girecektir.

Ve bu, P yerberi noktasındaki hızın, 10.7 kilometre bölü saniye olmasına yol açar.

Bu durumda benim ikinci çözümüm Q_A mesafesi için oldukça büyük değer verir.

Şaşırtıcı değil. Çünkü yarıbüyük eksenin 50000 kilometre olduğunu biliyoruz.

Biz 9.3 çarpı 10 üzeri 4 kilometre olarak bulmuştuk ve bu değer, bu değerden 14 kat daha büyüktür. Bu durumda v_A hızı bu değerden 14 kat daha küçük olacaktır.

Sanırım 0.75 kilometre bölü saniye.

Evet, doğru.

Mutlak sonuç, Q_P çarpı v_P eşit Q_A çarpı v_A olmasıdır.

Bu açısal momentum korunumunun doğrudan sonucudur.

Ve bu ikisinin toplamı, QA artı QP , $2a$ yı verecektir; bu durumda yaklaşık olarak 100.000 kilometredir. Çünkü “ a ” 50.000 kilometreydi.

Bu ikisini toplarsanız 100.000’e oldukça yakın değer bulmalısınız ve gerçekten de bulursunuz.

Böylece şimdi elips hakkında bilinmesi gereken her şeyi biliyoruz; bu değerler sizlere vermiş olduğum bu dört başlangıç şartından elde edilmiştir.

Periyodu biliyoruz, yeröteyi biliyoruz, yerberinin nerede olduğunu biliyoruz ve yörünge periyodunu biliyoruz.

Bilmek istediğimiz her şeyi biliyoruz.

Şimdi oldukça zor bir konuya girmek istiyorum. Ve bu yörünge değiştirme ile ilgilidir.

Yörüngede olduğunuz zaman bir roketi ateşlediğinizde, yörünge değişecektir.

Ve bunu sadece biraz basitleştirilmiş bir durum için yapacağım.

Dairesel bir yörünge ile başlayacağım ve roketi hızımı, bu yönde yörüngeye teğet olarak artacak ya da azalacak şekilde ateşleyeceğim.

Eğer yörüngede bu şekilde gidiyorsam, roketi bu şekilde ya da bu şekilde ateşleyeceğim. Ve şimdilik bildiğimiz şey bunun oldukça zor olduğudur.

Böylece, bu bizim R yarıçaplı dairesel yörüngemiz ve X noktası saat 12:00 da roketimi ateşleyeceğim konumdur.

Yapacağım ilk şey, kinetik enerjiyi artırmaktır.

Böylece roketi ateşliyorum, bu yönde gidiyoruz.

Roketi bu yönde ateşliyorum ve başlangıçta hız yörünge hızıydı. Şimdi hız artacaktır.

Kinetik enerjiyi artırıyorum ve şimdi yeni ve daha büyük bir hız söz konusudur.

Eğer hızım fazla ise, bu durumda toplam enerjim de artar.

Kinetik enerjiyi artırıyorum.

Roketin yanması o kadar kısa ki ateşlemeden sonra cismin hala X noktasında olduğunu düşünüyorum.

Çok kısa bir ateşleme zamanı.

Böylece, kinetik enerji artmıştır; potansiyel enerji aynıdır. Toplam enerji artmıştır.

Ve bundan dolayı, şimdiki toplam enerji dairesel yörüngede sahip olduğum toplam enerjiden daha fazladır.

Fakat eğer durum böyleyse, bu durumda “ $2a$ ” $2R$ den daha büyük olmalıdır.

Şimdi bir eliptik yörüngede gidiyorum. Çünkü yeni hız, artık dairesel yörüngedeki hız değildir.

Ve böylece ne olacak?

Şimdi “2a” 2R den daha büyük olduğundan, buna benzer bir eliptik yörünge elde edeceğim. Çünkü benim toplam enerjim daha fazla.

Ve 5 nolu eşitliğe gittiğiniz taktirde bunu hemen görürsünüz.

Eğer toplam enerjiyi artırırsanız, “a” değerinizi artacaktır.

Tamam, böylece “2a” 2R den daha büyüktür.

Bu aynı zamanda bu eliptik yörüngedeki T periyodunun dairesel yörüngedeki periyottan daha büyük olması gerektiği anlamına gelir.

Güzel.

Şimdiye kadar, her şey çok iyi.

Diğer seçeneğim olan; bu yönde gaz püskürttüğüm durumda roketi ateşlersem .kinetik enerjiyi azaltırım.

Ateşlemeden sonra, hızım daha düşük olur.

Hızım şimdi daha düşük.

Kinetik enerjiyi azalttım.

Kinetik enerjiyi azalttığım zaman, eliptik yörüngedeki toplam enerji dairesel yörüngedekine kıyasla daha az olacak, “2a” 2R’den daha küçük olacak ve yörünge periyodu dairesel yörünge periyodundan daha küçük olacak ve bundan dolayı da yeni elips böyle olacak.

Ve böylece bu üç durum oldukça dikkatli incelemenizi istediğim durumlardır. Çünkü birazdan Peter ve Mary arasındaki romantizmden bahseden oldukça dramatik hikayede onlara ihtiyacımız olacak.

Peter ve Mary iki astronot. Ve her ikisi de dünya etrafında aynı yörüngedeler.

Peter bu anda X konumunda ve burası da Mary’nin olduğu yer.

Onlar aynı yörüngede, fakat farklı uydulardalar.

Onlar bu şekilde dolanıyor ve birbirlerinden, toplam çevrenin f kesiri türünden ifade edeceğim bir uzaklıkta bulunmaktalar. Böylece bu yay f çarpı $2\pi R$ ye eşittir.

Bu birbirlerinden ne kadar uzak olduklarıdır.

Ve bu Mary için X noktasına geri dönmesi için alacağı yolun $(1-f)$ çarpı $2\pi R$ olması demektir.

Şimdiye kadar, her şey yolundaydı.

Mary öğle yemeğini unutur ve telsizle Peter'e haber verir ve der ki, "Peter, yemeğim yok". Peter buna çok üzülür. "Hiç problem değil." der.

"Sana bir jambonlu sandviç atacağım." Böylece, Peter bir jambonlu sandviç hazırlar ve onu Mary'nin yakalayabileceği şekilde Mary'e atmak ister.

Peter bunu nasıl yapabilir? Bunu yapmak için en iyi, en kesin yol jambonlu sandviğin yörünge periyodunu, Mary'nin X noktasına gelmesi için geçen zamana eşit olacak şekilde ayarlamaktır.

Ve sizlere bazı değerler vererek daha belirgin olacağım.

Bu durumda daha iyi anlayabilirsiniz.

Astronotların yarıçapı 7000 kilometre olan bir yörüngede olduklarını varsayalım.

Ve f eşit 0.05 olduğunu, Peter ve Mary arasındaki uzaklığın da 2200 kilometre olduğunu varsayalım.

Böylece bu f çarpı $2\pi R$ dir.

Eğer R yarıçapını biliyorsanız astronotların hızını hemen bulabilirsiniz.

Bütün gerekli bilgiler orada var.

Böylece, R eşit 7000 kilometre için, astronotların hızı, yaklaşık 7.55 kilometre bölü saniyedir. Burada "a" astronotları temsil etmektedir.

7.55 kilometre bölü saniye.

Ve kesin olan diğer şey ise dolanma periyodunun 97 dakika olduğudur.

Ve bunların tümü R nin bilinmesi ile elde edilir.

Tamam, eğer dolanması 97 dakika sürüyorsa, bu durumda 97 dakikanın %5 i eğer yuvarlarsak yaklaşık 5 dakika eder.

Böylece buraya gelmesi 5 dakika sürer.

97 dakikanın %95 i, 92 dakikadır.

Böylece Mary için X noktasına geri dönmesi yaklaşık 92 dakikadır.

Böylece eğer, sandviçime 92 dakika periyoduna sahip olan bir yörünge verirsem, Mary' nin sandviçi yakalamasını sağlarım. Çünkü sandviç 92 dakika sonra X noktasına gelecek ve Mary' de X noktasında olacaktır.

Burada önemli olan, olayı anlamandır.

Eğer olayı anlarsanız, bu durumda gerisi gelecektir.

Böylece Peter'in sandviç atmasından sonraki periyodu, belki de geriye doğru atmak zorundadır, ve bu periyot 92 dakika ise Mary burada sandviçi yakalayacaktır.

Ve böylece bu ilk çözüm için oldukça açık olan gerekli şart; s sandviçi gösterebilir, sandviğin periyodunu T_s eşit $(1-f)$ çarpı, astronotların periyodu, T_a 'ya ayarlamaktır.

Burası 97 dakika, burası 0.95, böylece burası 92 dakika ve burası da 92 dakika.

Böylece Mary X noktasına geri dönecektir.

Atıldıktan sonra sandviğin yörünge periyodu nedir? 6 nolu eşitlikte görebilirsiniz.

4π kare çarpı "a" küp bölü MG nin 1bölü 2. kuvveti, bu $(1-f)$ çarpı dairesel yörüngede bulunan astronotların yörünge periyotlarına eşit olmalıdır.

1 nolu eşitliği alıyorum ve bu 4π kare R küp bölü MG nin 1 bölü 2. kuvvetidir.

Bu gerek şarttır.

M leri götürürüz, G leri götürüyoruz, 4 leri götürüyoruz, π leri götürüyoruz,

Neleri götürmüyoruz? Götürmediğimiz şeyler "a" nın 3 bölü 2. kuvveti eşit $(1-f)$ çarpı R nin 3 bölü 2. kuvvetidir.

O halde "a" eşit R çarpı $(1-f)$ üzeri 2 bölü 3. tür.

Ve bu son derece basit bir sonuçtur.

Bu eşitlik eğer Peter ve Mary'nin yörüngesi biliyorsanız, bu R, ve eğer bu sevgililer arasındaki f türünden belirtilen uzaklığın ne kadar olduğunu biliyorsanız, bu durumda sandviç yörüngesinin yarıbüyük ekseninin ne olduğunu bulursunuz.

Bu değer, bu eşitlikten elde edilir.

Fakat, sizler yarıbüyük eksen uzunluğunu bilince, 5 no.lu eşitlik vasıtasıyla hemen sandviğin hızını hesaplayabilirsiniz.

Çünkü 5 nolu eşitlik, sizlere eksi mMG bölü $2a$ nın, burada "a" sandviç yörüngesinin yarıbüyük eksenini göstermektedir, 1 bölü 2 m çarpı sandviğin hızının karesi, bu ateşlemeden sonra X noktasında meydana gelmektedir, ateşlemeden sonra Peter'in sandviçi atmasından sonrayı ifade etmektedir, eksi mMG bölü büyük R olduğunu söylemektedir. Çünkü sandviç hala büyük R noktasında ve Peter v_s hızını değiştirmiştir.

Ve böylece "a" yı bilince, bu eşitlik sizlere hemen v_s hızını verecektir. Ve bu durumda v_s hızını bilince Peter' in hangi hızda atması gerektiğini bilirsiniz.

Bunu ayrıntılı olarak orada görülen örnekte ele alalım.

Eğer orada bulunan değerleri kullanarak “a” yı hesaplarsak, bu eşitliği kendiniz kolayca teyit edebilirsiniz. f nin ne olduğunu biliyorsunuz, R nin ne olduğunu biliyorsunuz.

Bu durumda “a” nın 6765 kilometre olduğunu bulurum.

Dikkat ederseniz “a” R’den daha küçüktür.

Küçük olmalıdır. Çünkü sandviç atıldıktan sonra, yeşil ile gösterilen elipsi elde edeceğim oldukça açıktır.

Dolanma süresinin, Peter’in dolanma süresinden daha küçük olmasını istiyoruz.

Eğer bu elipsi dolanma zamanı, Peter’in dolanma zamanından daha kısa ise, Peter’in sandviçi geriye doğru atması gerekir. Ve bu nedenle, yarıbüyük ekseninin R’den daha küçük olmasını beklersiniz ve de öyledir.

Bu durumda sandviğin hızı, mekanik enerjinin korunumu olan 6 no.lu eşitlikten elde edilir. Ve değeri 7.42 kilometre bölü saniyedir.

Şimdi, önemli olan sandviğin hızının ne olduğu değil, fakat Peter için asıl mesele sandviçe ne kadar bir hız vermek zorunda olduğudur. Bu v_s eksi v_a dır ve sizler hızları çıkarmak zorundasınız.

v_s sandviğin hızı, v_a yörüngedeki astronotun hızıdır.

Ve bu farkın değeri eksi 0.13 kilometredir.

Ve eksi işareti, Peter’in sandviçi geriye doğru atması gerektiğini göstermektedir.

Oldukça şaşırtıcı.

Peter tüm yol boyunca Mary’i görmektedir. Mary’e sandviçi vermesi için Peter bunu yapmıyor, fakat bunu yapıyor.

[Whooshes]

Ve bu durumda sandviç bu yeni yörüngede hala ileriye doğru gidecektir.

92 dakika sonra, sandviç burada ve Mary.

Pardon, burada idi.

Böylece o ileri gider.

92 dakika sonra, sandviç burada.

92 dakika sonra, Mary de tam olarak bu noktadadır ve sandviçi yakalayabilir.

Şimdi, 0.13 kilometre bölü saniye saatte 300 mil bölü saat eder ki bu Peter için bile zordur.

Ve böylece farklı çözümler aramak zorundayız.

Bu olmayacak.

Bu en kolay olanıydı fakat olmayacak.

Eh, acele etmek için hiçbir neden yok.

Sandviçi Dünya'nın etrafında iki kez ve Mary' nin de üç kez ya da Mary' nin iki kez ve sandviğin sadece bir kez dolanmasını sağlayabiliriz.

X noktasında karşılaştıkları sürece, bir problem yok.

Bu yüzden elimizde çözüm alternatifleri vardır.

Mary' nin bu X noktasından n_a defa geçmesini ve sandviğin bu X noktasından n_s defa geçmesini sağlayabiliriz.

Bunlar tamsayı olduğu sürece, oldukça mükemmel.

Sonuçta yeterince sabırlıysalar, X noktasında karşılaşacaklardır.

Ve eğer bu yeni kavramı hesaba katacak olursanız ve X noktasından belli bir sayıda geçiş için beklerseniz, bu durumda orada görmüş olduğunuz "a" ve R arasındaki eşitlik, sadece çok az bir şekilde değişir.

Şimdi, a eşit R çarpı n_a eksi f bölü n_s üzeri 2 bölü 3 elde edersiniz.

Ve eğer burasını ve burasını 1 olarak alırsanız, bu durumda onların sandviçi yakalayacakları durum oluşur. Bu durumda gerçekten R çarpı (1-f) üzeri 2 bölü 3 olduğunu görürsünüz.

Böylece, bu tam olarak orada sahip olduğumuz durumdur.

Denemiş olduğunuz tüm çözümlerin hepsi geçerli olmayacaktır.

n_a eşit 1 ve n_s eşit 3 olması hiçbir çözüm vermeyecektir.

Ve bunun neden çözüm olmadığını sizlere bırakacağım.

Bir çözümü yok.

1990 yılında, 8.01 dersini ilk kez anlattığımda, arkadaşım ve meslektaşım George Clark'tan sınıfa Mary ve Peter yörüngede iken sandviğin atılmasını, sandviğin yörüngesini, yakalanmasını gösterebileceğim bir program yazmasını istedim ve o da yazdı.

Harika bir programdı, fakat o program artık işletim sistemi nedeniyle çalışmıyor.

Bilgisayarlar değişti, benim sağ kolum, Dave Pooley, Athena'da çalışacak bir programı yeniden yazmayı önerdi. Ve size bunu göstereceğiz. Sizler de bunu kendi başınıza kullanabilirsiniz.

Dersin ana sayfasında mevcut, Böylece, Dave' in sizlere göstereceği her şeyi, siz kendiniz yapabilirsiniz.

Bu programda ihtiyaç duyulan giriş parametreleri R yarıçapı, f değeri, n_a ve n_s değerleridir.

Ve geri kalan her şeyi program kendisi yapacak, Böylece sizler Mary' nin X noktasından kaç defa geçmesini istediğinizi ve sandviğin X noktasından kaç defa geçmesini istediğinizi belirleyebilirsiniz.

Daha sonra program sandviğin hızını hesaplayacaktır.

Program ayrıca sizlere gerçekten Peter' in sandviği atması gerektiği hız olan v_s eksi v_a değerini verecektir.

Fakat çok akıllıca bir şekilde, program boyutsuz parametre olan bu değer ile çalışır.

Ve bu v_s bölü v_a eksi 1 değeri oldukça özgün bir sayıdır. Çünkü sizler büyük G den bağımsız ve büyük M den bağımsız olan çözümleri elde edersiniz. Şimdi size bir örnek vereceğim.

Bu boyutsuz sayıyı eksi 0.0175 olarak bulduğunuzu varsayalım. Bu değer n_a ve n_s in 1 olduğu durum için çözümdür.

Bunu görürsünüz.

Bilgisayar, bu değeri bizim için üretecek.

Eğer şimdi yörüngemizi 7000 kilometre alırsak,

v_a nın ne olduğunu biliyoruz, böylece şimdi v_a çarpı bu sayı olan v_s eksi v_a değerini hesaplayabiliriz.

Fakat biz v_a nın ne olduğunu biliyoruz. Böylece eksi 0.0175 çarpı 7.55 kilometre bölü saniye, bu durumda, hayret eksi 0.13 kilometre bölü saniye elde edersiniz.

Şüphesiz, bu değer olacaktır. Çünkü bu bizim daha önce hesapladığımız, n eşit 1 durumu içindir.

İşte orada.

Ve böylece bu boyutsuz sayı oldukça açık ve sizlere birkaç örnek göstereceğiz.

Bu 300 mil bölü saat olacaktır ki elbette bu hızı vermek mümkün değildir.

Dave, neden programı göstermiyorsun? Ve daha sonra bu program ile ne yapabileceğimizi göreceksiniz.

Programa ilginç olan birkaç parametre değerini girebileceğiz.

Dave, öğrencilerin bu programla neler yapabileceklerini bize biraz açıkla.

Oh, Dave'in size anlatacağı şeyleri takip etmenize yardımcı olmak için yukarıda asılı slaydı göstereyim.

Oradaki f değerini görüyor musunuz? Onu her zaman % 5 olarak alıyoruz. Ve burada Mary' nin X noktasından kaç defa geçeceği ve sandviçin X noktasından kaç defa geçeceğini belirten sayıları görmektesiniz.

Bu üzerinde birlikte çalışmış olduğumuz ilk durum.

Burada eksi 0,017 sayısını görmektesiniz ve gerçekten, başarılı bir yakalama idi.

O halde ilk olarak bunun üzerinde çalışalım.

David, nasıl çalıştığını açıklar mısın?

DAVID: Tamam, ekranın ortasında Dünyayı görmektesiniz. Ve bu iki üçgen astronotları temsil etmektedir.

Sarı olan Mary' yi ve kırmızı olanı Peter'i; ve Peter sandviçi tam orada tutuyor.

Onlar Dünya'nın merkezinden 22.000 kilometre yarıçap uzakta harekete başlamaktalar.

Bu varsayılan değerdir, fakat isterseniz sizler değiştirebilirsiniz.

Ve bu aşağıya doğru açılan menüler vasıtasıyla n_a ve n_s değerlerini ayarlıyoruz ve onların her ikisini de 1 olarak ayarlayacağız.

Ve programdan bizim için bu boyutsuz parametre değerini hesaplamasını istiyoruz. Ve onu bize veriyor ve biz bu değeri kullanmak istiyoruz.

Ve böylece her şeyi ayarladık.

LEWIN: Bu değer o sayı değil mi? eksi 0,0175 değeri değil mi?

DAVID: Evet, oradaki değer.

Ve daha sonra, programdan sandviçi atması için hazır olmasını istiyoruz.

Buradaki düğmeye basıyoruz ve hazır hale geldiğinde buradaki, yeşil hareket ettir düğmesi aktif hale geliyor.

Ve aktif hale geldiğinde, düğmeye tıklayabiliriz ve bizim için sandviç atışını gerçekleştirecektir.

LEWIN: Peter her zaman sandviçi X konumunda saat 12:00 de atıyor.

DAVID: Her zaman saat 12:00 de.

LEWIN: işte sandviç gidiyor.

Sandviçi görüyor musunuz? Kocaman sandviç.

Büyük sandviç.

Sandviğin tam olarak Mary' yi mutlu etmek için aynı zamanda dolandığına dikkat edin.

Şimdi 1 e karşı 2 değerini, denemememiz için hiçbir neden yoktur.

Bu Mary' nin X noktasına ulaşması, fakat sandviğin Dünya'nın etrafında iki kez dolanması anlamına gelir.

Prensip olarak bu çözümde bir sorun yok, ancak Dünya'dan oldukça uzakta olmak zorundasınız.

Eğer 22.000 kilometre yarıçapa sahip olan Dave'in yörüngesinde olduğu gibi Dünya'ya çok yakın olursanız, bir felaket meydana gelecektir.

DAVID: Evet, tamam, şimdi n_s değerini 2 olarak set ediyoruz. Ve bunu aşağıya doğru açılan menü vasıtası ile yapıyoruz.

Ve programa yine sandviçi atması için hazır hale gelmesini istiyoruz. Ve yörünge'nin sayısal hesaplamalarını yapıyor.

Ve hazır olduğunda, bizleri bilgilendirecek.

Ve şimdi sandviç atışını izleyebiliriz.

LEWIN: Sandviç gidiyor.

Dünya'nın etrafında iki defa dolaşmak istiyor, fakat Dünya'ya çarpıyor.

Bu çok kötü.

Eğer bu boyutsuz parametreyi eksi 1 olarak yaparsanız, bu durumda, v_s sıfır olur.

Ve v_s nin sıfır olması ne anlamına gelir?

Sandviğin durgun olması, yörüngede artık bir hızının olmaması demektir.

Ve böylece elipse ne olur? Bu durumda sandviç radyal olarak dünyaya düşer.

Dave devam et?

DAVE: Tamam, eğer bu boyutsuz parametre için kendi değerlerimizi kullanmak istiyorsak, bu durumda bizim istediğimiz bir şeyi yazarız. Şimdi buraya eksi 1 yazacağız.

Ve programın hesaplanan değerlerin, yerine bizim değerlerimizi kullanacağından emin olmalıyız.

Bu durumda, bu n_a ve n_s değerleri önemli değildir.

Onlar önemsiz olur. Çünkü program bizim değerlerimizi kullanacaktır.

Ondan hazır olmasını istiyoruz.

LEWIN: Şimdi eksi 1, her şeye engel olmaktadır.

DAVID: Evet.

Hesaplamaları yapıyor ve şimdi ne olacağını göreceğiz.

LEWIN: Saat 12:00, işte sandviç gidiyor.

Şimdi, Peter sandviçi geriye doğru atmaktansa ileriye doğru atma kararı veriyor, çünkü bakarsanız, burada kırmızı ile gösterilen bir elipsimiz var.

Mary' nin X noktasından iki kez geçmemesi için herhangi neden yok.

Bir, iki

Ve bu durumda sandviç daha büyük bir elips üzerinde hareket edecek ve Mary iki kez dolandığı zaman karşılaşacaklar.

Bu durumda, kesinlikle sandviç ileri doğru atılmalıdır.

Ve böylece Peter, 2 ye 1 olarak adlandırdığımız durum için bir hesaplama yapıyor.

Mary X noktasından iki kez geçer;

Sandviç X noktasından bir kez geçer.

Fakat Peter bir hata yaptı.

Peter sinirleniyor. Ve yanlış parametreler kullanıyor ve ne olacağını göreceksiniz.

Dave sizlere ilk olarak doğru parametreleri gösterecek.

DAVID: Tamam, eğer programdan 2 ye 1 durumu için hesaplama yapmasını istersek, bu durumda program bizlere boyutsuz parametre için aşağı yukarı 0.1659 değeri verecektir.

Fakat Peter'in yanlış hesaplama yaptığını biliyorsunuz. Ve Peter 0.164 değerini kullanmak istiyor. Böylece programa gireceği değer bu. Ve bizler atışı hazırlayacağız ve bu değer ile ne olacağını göreceğiz.

Tamam, şimdi hazır.

LEWIN: Şimdiye kadar zavallı Mary acıkmış olmalı.

İşte başlıyoruz.

Şimdi ileri doğru atıyor.

Bunu görebilirsiniz.

Görüyorsunuz, ileri gidiyor.

Sandviç oldukça büyük bir elips çiziyor ve Mary iki kez dolanacak.

Mary burada olduğu zaman, görüyorsunuz sandviç sadece yolun yarısındadır.

Ve Peter doğru olarak yapmış olsaydı, Mary'nin sıkıntıları yakında biterdi.

Fakat Peter bu küçük hatayı yaptı.

Ve Mary onu yakalayamaz.

Eğer bu boyutsuz parametreyi artı 0.42 olarak alırsanız, bu durumda sandviğin yörüngeden kurtulma hızına sahip olacağı konusunda kendinizi ikna edebilirsiniz.

Kimbilir, belki de Peter Mary' ye bir noktada kızmıştı ve bu yüzden sandviği çok hızlı attı; gene de bu durumda ne olacağını Dave sizlere gösterecek.

LEWIN: Ve sonsuza gidiyor ve X noktasına geldiği zaman artık taze olmayacaktır.

Tamam, gelecek derste görüşürüz.