18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

18.112 pg 2 Çözümleri

1 (sayfa 58 deki Problem 7).

Çözüm: A, (X, d) ayrılabilir metrik uzayında ayrık bir küme olsun. Bu halde her $a \in A$ için

$$A \cap N_{r_a}(a) = \{a\}$$

olacak biçimde bir $r_a > 0$ vardır. Bu A daki her $a \neq b$ için

$$N_{r_a/2}(a) \cap N_{r_b/2}(b) = \varnothing$$

olduğunu gösterir.

E sayılabilir yoğun bir alt küme olsun, bu durumda her $a \in A$ için

$$e_a \in E \cap N_{r_a/2}(a)$$

olacak biçimde bulunabilir ve $a \neq b$ için

$$e_a \neq e_b$$

dir. Böylece A dan E ye bir birebir fonksiyon elde edilir ve bu nedenle A sayılabilirdir.

(Diğer Yol) Ayrılabilir bir metrik uzayın alt kümesi de ayrılabilir metrik uzaydır. (Aşikar değildir. Kanıtlayınız!) Böylece A ayrılabilirdir. A ayrık olduğundan, A nın yoğun alt kümesi yalnızca A nın kendisidir. Bu nedenle A sayılabilirdir.

2 (sayfa 66 daki Problem 1).

Çözüm: İki basit örnek:

$$\begin{aligned} f_1(re^{i\theta}) &= \frac{re^{i\theta}}{1-r} \\ f_2(re^{i\theta}) &= \tan(\pi r/2)\, e^{i\theta} \end{aligned}$$

Bu fonksiyonların birebir, üzerine, sürekli ve terslerinin de sürekli olduğunu görmek zor değildir.

Daha fazla örnekler: $[0,1)$ aralığını $[0,\infty)$ aralığına resmeden herhangi g topolojik tasviri ile

$$S^1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$$

kümesini kendi üzerine resmeden h topolojik tasvirini gözönüne alalım. Bu durumda

$$f(re^{i\theta}) = g(r)h(e^{i\theta})$$

tasviri D den $\mathbb{C}$ ye bir topolojik tasvirdir. Örneğin,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{7r^8 e^{i(\theta+\pi)}}{1-r^5}$$

D den $\mathbb{C}$ ye bir topolojik tasvirdir.

3 (sayfa 66 daki Problem 3).

Çözüm: X kompakt olmak üzere $f : X \to Y$ sürekli ve birebir olsun. Bu durumda $f(X)$ kompakttır ve f^{-1}, $f(X)$ üzerinde iyi tanımlıdır. f^{-1} in sürekli olduğunu kanıtlamalıyız, yani $f = (f^{-1})^{-1}$ kapalı kümeleri kapalı kümelere resmeder. Bu doğrudur, çünkü her $A \in X$ kapalı alt kümesi için A kompakttır (çünkü X kompakt) ve böylece $f(A)$ kompakttır. Bu nedenle de $f(A)$ kapalıdır.

4 (sayfa 66 daki Problem 4).

Çözüm:

$$d_0 = \inf\{d(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$d(x_n, y_n) < d_0 + 1/n$$

olacak biçimde $x_n \in X$, $y_n \in Y$ alalım.

X kompakt olduğundan, $x_0 \in X$ noktasına yakınsayan bir $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi vardır. Y de kompakt olduğundan, $y_0 \in Y$ noktasına yakınsayan $\{y_{n_i}\}$ nin bir $\left\{y_{n_{i_j}}\right\}$ alt dizisi vardır. Bu halde, yeterince büyük j için (ve böylece n_j için)

$$\begin{aligned} d_0 &\leq d(x_0, y_0) \\ &\leq d(x_0, x_{n_{i_j}}) + d(y_0, y_{n_{i_j}}) + d(x_{n_{i_j}}, y_{n_{i_j}}) \\ &\leq d_0 + 3/n \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$d(x_0, y_0) = d_0$$

bulunur.

(Diğer Yol) Üçgen eşitsizliğiyle, d nin $X \times Y$ çarpım uzayı üzerinde sürekli bir fonksiyon olduğunu ve

$$\widetilde{d}\,((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$$

metriğiyle $X \times Y$ çarpım uzayının bir kompakt metrik uzay olduğunu kanıtlayınız. Sayfa 62 deki Teorem 7 yi kullanarak kompaktlığı ispatlayınız.

5 (sayfa 72 deki Problem 3).

Çözüm:

$$\left| f\,(z)^2 - 1 \right| < 1$$

den

$$\operatorname{Re} f(z) \neq 0$$

olduğunu görmek kolaydır.

$\operatorname{Re} f(z)$ süreklidir, bu nedenle bağlantılı Ω kümesini $\mathbb{R}$ de 0 ı içermeyen bağlantılı bir kümeye resmeder. Böylece Ω da

$$\operatorname{Re} f(z) > 0 \text{ veya } \operatorname{Re} f(z) < 0$$

olur.