18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

18.112 pg 3 Çözümleri

1 (sayfa 83 deki Problem 2).

Çözüm: İlk olarak aşağıdaki iki yardımcı teoremi ispatlayalım.

Yardımcı Teorem 1 Simetri çemberleri çemberlere dönüştürür.

İspat: Simetri iki tasvirin bileşkesidir: Eşlenik alma

$$z \longmapsto \overline{z}$$

ve doğrusal dönüşüm

$$z \longmapsto R^2/(z-\overline{a})+a,$$

her iki tasvirde çemberleri çemberlere dönüştürür, bu nedenle de simetri çemberleri çemberlere dönüştürür.

Yardımcı Teorem 2 C_1 ve C_2 çemberlerinin her ikisinin de bir l doğrusuna göre simetrik iki çember olduğunu varsayalım ve C_3 çemberi, C_1 çemberinin C_2 çemberine göre simetrik görüntüsü olsun. Bu durumda, C_3 çemberi de l doğrusuna göre simetriktir. (Bunu simetri prensibi ile karşılaştırınız!)

İspat: Genelliği bozmaksızın, l doğrusu olarak $x-$eksenini alalım ve C_2 nin merkezinin orijin olduğunu varsayalım. Bu durumda $z \in C_1$ ve $z^* \in C_3$ arasındaki ilişki

$$z^*\overline{z} = R^2$$

dir. Böylece

$$\overline{z} \in C_1 \Longrightarrow \overline{z^*} \in C_3$$

yani C_3 çemberi l doğrusuna göre simetriktir.

Şimdi esas problemimize dönelim. z nin simetrik noktası

$$z^* = 1/(\overline{z}-2)+2$$

dir.

- *Sanal eksene göre simetri.* Yardımcı teorem 1 den, görüntü çemberdir. Yardımcı teorem 2 den, görüntü olan çember $x-$eksenine göre simetriktir. Üstüne üstlük,

$$0^* = 3/2, \infty^* = 2$$

dir ve her ikisi de $x-$ekseni üzerindedir, bu nedenle görüntü çemberi

$$\left|z - \frac{7}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

dir.

- $x = y$ doğrusuna *göre simetri.* l doğrusu $x + y = 2$ dir ve

$$(1+i)^* = (3+i)/2 \quad \text{ve} \quad \infty^* = 2$$

dir ve her ikisi de l doğrusu üzerindedir, bu nedenle görüntü çemberi

$$\left|z - \frac{7+i}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

dir.

- $|z| = 1$ çemberine *göre simetri.* l doğrusu yine $x-$eksenidir ve

$$1^* = 1 \quad \text{ve} \quad (-1)^* = 5/3$$

olduğundan görüntü çemberi

$$\left|z - \frac{4}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

bulunur.

2 (sayfa 88 deki Problem 3).

Çözüm: S nin sabit noktalarının sayısını gözönüne alalım. Eğer S nin 2 den fazla sabit noktası varsa, birim tasvir olmak zorundadır ki kendiliğinden eliptiktir. Üstüne üstlük, 86. sayfadaki (13) eşitliğinden sabit nokta (∞ da olabilir) daima olacaktır.

Şimdi S nin iki ayrık noktası sabit a ve b olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\frac{S(z)-a}{S(z)-b} = k\frac{z-a}{z-b}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{z-a}{z-b} &= \frac{S^n(z)-a}{S^n(z)-b} \\
&= k\frac{S^{n-1}(z)-a}{S^{n-1}(z)-b} \\
&= k^2\frac{S^{n-2}(z)-a}{S^{n-2}(z)-b} \\
&= \cdots \\
&= k^n\frac{z-a}{z-b}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$k^n = 1$$

dir ve buradan

$$|k| = 1$$

bulunur ve S eliptiktir.

(a, b den biri, mesela a, sonsuz ise

$$S\left(z\right) - b = k\left(z-b\right)$$

olur. Yukarıdaki gibi aynı yolla

$$|k| = 1$$

olduğunu görürüz ve S eliptiktir.)

Son olarak S nin yalnızca bir a sabit noktasına sahip olduğunu varsayalım. $a \to \infty$ a ve $\infty \to a$ ya resmeden dönüşüm

$$Tz = 1/(z-a) + a$$

olsun. T birebir ve üzerine olduğundan, TST^{-1} dönüşümü yalnızca bir sabit noktaya sahiptir:

$$Ta = \infty$$

Böylece $c \neq 0$ için

$$TST^{-1}z = cz + d$$

dir. İddia ediyoruz ki bu durumda $c = 1$ dir. Aksi takdirde

$$f = d/(1-c)$$

TST^{-1} in diğer bir sabit noktası olurdu. Şimdi

$$z = TS^nT^{-1}z = \left(TST^{-1}\right)^n z = z + nd$$

olur ve buradan $d = 0$ bulunur. Bu nedenle

$$TST^{-1} = I$$

ve

$$S = T^{-1}IT = I$$

eliptiktir.

3 (sayfa 88 deki Problem 5).

Çözüm: İlk olarak, $a, b \in \mathbb{C}$ noktalarının Riemann küresi üzerinde karşılıklı çap uçlarına karşı gelmesi için gerek ve yeter koşulun

$$a\overline{b} = -1$$

olduğunu görmek zor değildir. (Kontrol ediniz!) Böylece

$$b = -1/\overline{a}$$

olur.

T, Riemann küresinin $\widetilde{T}$ dönmesine karşılık gelen bir doğrusal dönüşüm olsun.

Bu durumda $\widetilde{T}$ nin Riemann küresinin merkezine göre simetrik olan A ve B gibi iki sabit noktası vardır. Bu nedenle T nin a ve $-1/\overline{a}$ gibi iki sabit noktası vardır.

$$\frac{|z-a|}{|z+1/\overline{a}|} = c$$

denklemini sağlayan C_2 çemberlerini gözönüne alalım. Riemann küresi üzerindeki Z noktası, düzlemdeki z noktasına karşı gelen nokta olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\frac{|Z-A|}{|Z-B|} &= \frac{2\,|z-a|\,/\sqrt{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|a|^2\right)}}{2\,|z+1/\overline{a}|\,/\sqrt{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|1/\overline{a}|^2\right)}} \\ &= \frac{|z-a|\sqrt{\left(1+|1/\overline{a}|^2\right)}}{|z+1/\overline{a}|\sqrt{\left(1+|a|^2\right)}}\end{aligned}$$

bir sabittir, yani C_2 çemberleri, $\widetilde{T}$ dönmesi altında değişmeyen, Riemann küresi üzerinde "enlemesine" çemberlere resmedilir. Böylece C_2 çemberleri T dönüşümü altında değişmez ve bu bize T nin eliptik olduğunu söyler.

Diğer taraftan, T nin eliptik ve a, $-1/\overline{a}$ iki sabit noktası olduğunu varsayalım. bu durumda T, her C_2 çemberini kendi üzerine resmeder ve C_1 çemberini C_1' çemberine resmeder. C_1 ve C_1' arasındaki açı $\arg k$ dır(86 ıncı sayfadaki 3 üncü paragrafa bakınız). Böylece $\widetilde{T}$, çemberleri kendi üzerine "enlemesine" olarak resmeder ve steografik izdüşüm konform olduğundan "boylamasına" çemberleri $\arg k$ dönme açısıyla diğer "boylamasına" çemberlere resmeder. Bu nedenle $\widetilde{T}$, C_2 çemberi ("enlemesine" çember) üzerinde $\arg k$ sabit açısıyla döndürüyormuş gibi davranır. Bu $\widetilde{T}$ nın A, B yi sabit bırakan bir dönme olduğunu ifade eder.

Böylece Riemann küresinin dönmelerini gösteren tüm doğrusal dönüşümler kesinlikle a ve $-1/\overline{a}$ ($a=0$ iken $-1/\overline{a}=\infty$ olur) sabit noktalı eliptik doğrusal dönüşümlerdir.

4 (sayfa 108 deki Problem 2).

Çözüm: 1)

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r} x\,dz &= \int_0^{2\pi} (r\cos t)(-r\sin t + ir\cos t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-r^2\cos t\sin t + ir^2\cos^2 t)dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi} (-2\sin 2t + i(\cos 2t + 1))dt \\
&= \frac{r^2}{2} \times i \times 2\pi \\
&= \pi r^2 i.
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
\int_{|z|=r} xdz &= \int_{|z|=r} \frac{z + r^2/z}{2} dz \\
&= \int_{|z|=r} \frac{z}{2} dz + \int_{|z|=r} \frac{r^2}{2z} dz \\
&= \frac{r^2}{2} \int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz \\
&= \frac{r^2}{2} \times 2\pi i \\
&= \pi r^2 i.
\end{aligned}
$$

5 (sayfa 108 deki Problem 4).

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
\int_{|z|=r} |z-1|\,|dz| &= \int_0^{2\pi} \left|e^{it}-1\right| \left|ie^{it}\right| dt \\
&= \int_0^{2\pi} |\cos t + i\sin t - 1|\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t - 1)^2 + \sin^2 t} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 (t/2)} dt \\
&= -4\cos (t/2)|_0^{2\pi} \\
&= 8.
\end{aligned}
$$