18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

18.112 pg 5 Çözümleri

1 (sayfa 161 deki Problem 1(f)).

Çözüm:

$$f(z) = \frac{1}{z^m (1-z)^n}$$

fonksiyonunun iki tane kutbu vardır; 0, m inci mertebeden kutup ve 1, n inci mertebeden kutup noktasıdır. Bu kutup noktalarında Taylor serisi ile aşağıdaki açılımları yazabiliriz:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^m}\left[1 + nz + \frac{n(n+1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{n(n+1)\cdots(n+m-2)}{(m-1)!}z^{m-1} + \varphi_m(z)z^m\right] \\ &= \cdots + \binom{n+m-2}{m-1}\frac{1}{z} + \cdots \end{aligned}$$

ve buradan

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \binom{n+m-2}{m-1}$$

bulunur.

$$m \longleftrightarrow n, z \longleftrightarrow 1-z$$

simetrisiyle kolayca

$$\begin{aligned} f(z) &= \cdots + \binom{m+n-2}{n-1}\frac{1}{1-z} + \cdots \\ &= \cdots - \binom{m+n-2}{n-1}\frac{1}{z-1} + \cdots \end{aligned}$$

ve buradan

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = -\binom{n+m-2}{n-1}$$

bulunur.

2 (sayfa 161 deki Problem 3(b)).

Çözüm: 156 ıncı sayfadaki (2) formülünden

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{x^4+5x^2+6} = 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+5z^2+6}\right)$$

olduğunu biliyoruz. Bu halde

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2}{z^4+5z^2+6} \\ &= \frac{z^2}{\left(z^2+2\right)\left(z^2+3\right)} \\ &= \frac{z^2}{\left(z-\sqrt{3}i\right)\left(z+\sqrt{3}i\right)\left(z-\sqrt{2}i\right)\left(z+\sqrt{2}i\right)} \end{aligned}$$

fonksiyonu yalnızca basit kutuplara sahiptir ve

$$\begin{aligned} \sum_{y>0} \operatorname{Res} f(z) &= \operatorname*{Res}_{z=\sqrt{3}i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}i} f(z) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2i} - \frac{\sqrt{2}}{2i} \end{aligned}$$

olur.

İntegrand çift fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4+5x^2+6} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2dx}{x^4+5x^2+6} \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

bulunur.

3 (sayfa 161 deki Problem 3(f)).

Çözüm: $a \neq 0$ varsayalım. 156 ıncı sayfadaki (3) formülünden

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x dx}{x^2+a^2} = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}\, dx$$

olduğunu biliyoruz ve

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}\, dx &= 2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}\right) \\ &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i|a|}\left(\frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}\right) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{2} e^{-|a|} \\ &= \pi i e^{-|a|} \end{aligned}$$

bulunur.

İntegrand çift fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\pi i e^{-|a|}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}e^{-|a|}\end{aligned}$$

bulunur.

$a=0$ durumunda, sonuç aynıdır. (158 inci sayfaya bakınız).

4 (sayfa 161 deki Problem 3(h)).

Çözüm: $\log z$ yi $\arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ olmak üzere $\mathbb{C}\setminus\{iy \mid y\le 0\}$ üzerinde tek-değerli olacak biçimde

$$\log z = \log|z| + i\arg z$$

ile tanımlayalım. Bu durumda, C eğrisi sayfa 160 daki **Şekil 4-13** deki eğri olmak üzere

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\log z}{1+z^2}\,dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{\log z}{1+z^2} \\ &= 2\pi i\frac{i\frac{\pi}{2}}{2i} \\ &= \frac{\pi^2}{2}i\end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan γ ile R yarıçaplı üst yarım çember gösterilirse,

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma \frac{\log z}{1+z^2}\,dz\right| &\le \int_\gamma \frac{|\log z|}{|1+z^2|}\,|dz| \\ &\le \pi R\frac{|\log|R||+\pi}{|1-R^2|}\end{aligned}$$

olur. $R\to 0$ ve $R\to\infty$ durumunda 0 a yakınsar. Böylece

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\log z}{1+z^2}\,dz &= \int_{-\infty}^0 \frac{\log|x|+i\pi}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx \\ &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

bulunur. Her iki yanın reel kısmı alınırsa,

$$0 = \mathrm{Re}\,(I_1) + I_2$$

olur.

$$\mathrm{Re}\,(I_1) = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\log|x|}{1+x^2}\, dx = I_2$$

olduğundan

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\, dx = I_2 = 0$$

bulunur.

Dikkat! Bu integrali hesaplamak için rezidü yöntemini kullanmak zorunlu değilse,

$$x \to t = \frac{1}{x}$$

değişken dönüşümü yapılarak kolayca aynı sonuç bulunabilir.