MIT Açık Ders Malzemeleri
http://ocw.mit.edu

18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

Bu materyallerden alıntı yapmak veya Kullanım Şartları hakkında bilgi almak için
http://ocw.mit.edu/terms ve http://tuba.acikders.org.tr sitesini ziyaret ediniz.

18.112 pg 6 Çözümleri

1 (sayfa 193 deki Problem 1).

Çözüm: Kısmi çarpım

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \\ &= \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\frac{k-1}{k} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

dir ve böylece

$$\begin{aligned} \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty} P_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur

2 (sayfa 193 deki Problem 2).

1. Yol: Dikkat edilirse

$$\begin{aligned} (1-z)\,P_n &= (1-z)\,(1+z)\cdots\left((1+z^{2^{n-1}}\right) \\ &= 1 - z^{2n} \end{aligned}$$

dir. Limit alınırsa,

$$\begin{aligned} (1-z)\,P &= \lim_{n\to\infty}(1-z)P_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - z^{2^n}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$P = \frac{1}{1-z}$$

olur.

2. Yol: Tüme varım kullanılarak

$$P_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} z^k = \frac{1-z^{2^n}}{1-z}$$

ispatlanabilir ve böylece

$$P = \frac{1}{1-z}$$

olur.

3. Yol: 2−sel açılımın tekliğini kullanarak

$$P_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} z^k$$

elde edilebilir.

3 (sayfa 193 deki Problem 3).

1. Yol: *Teorem 5* den

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]$$

serisinin, her kompakt küme üzerinde mutlak ve düzgün yakınsadığını ispatlamak yeterlidir. Verilen kompakt küme $M/2$ ile sınırlı olacak biçimde yeterince büyük M tamsayısı alalım. Bu durumda, $n \geq M$ için

$$1 + \frac{|z|}{n} + \frac{|z|^2}{n^2} + \cdots < 2$$

dir. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{\infty} \left|\log\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]\right| &= \sum_{n=M}^{\infty} \left|\left[\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right]\right| \\
&= \sum_{n=M}^{\infty} \left|\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{n}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{n}\right)^4 + \cdots\right]\right| \\
&\leq \sum_{n=M}^{\infty} \left|\frac{z}{n}\right|^2 \left|\left[1 + \frac{|z|}{n} + \frac{|z|^2}{n^2} + \cdots\right]\right| \\
&\leq \frac{1}{2}M^2 \sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

olur. Bu ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]$$

serisinin, her kompakt küme üzerinde mutlak ve düzgün yakınsadığını ispatlar.

2. Yol: *Teorem 6* dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|e^{-\frac{z}{n}} + \frac{z}{n}e^{-\frac{z}{n}} - 1\right|$$

serisinin herhangi R için $|z| < R$ üzerinde düzgün yakınsadığını ispatlamak yeterlidir. Bu doğrudur, çünkü

$$\begin{aligned}
\left|e^{-\frac{z}{n}} + \frac{z}{n}e^{-\frac{z}{n}} - 1\right| &= \left|\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-z)^i}{n^i}\left(\frac{1}{i!} - \frac{1}{(i-1)!}\right)\right| \\
&\leq \frac{|z|^2}{n^2}\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{|z|}{n}\right)^{i-2}\frac{1}{(i-2)!} \\
&\leq \frac{|z|^2}{n^2}e^{\frac{|z|}{n}} \\
&\leq \frac{R^2}{n^2}e^{\frac{R}{n}}
\end{aligned}$$

dir.