18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

Ders #1: Kompleks Sayılar Cebri

(Ders kitabında 1-11 & 19-20. sayfalar)

Ders #1 ile ilgili hatırlatmalar

▶ 19-20. sayfalarda belirtildiği gibi $\mathbb{C}$ deki

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1}$$

çemberi

$$(\alpha_0-\alpha_3)\left(x^2+y^2\right)-2\alpha_1 x-2\alpha_2 y+\alpha_0+\alpha_3=0$$

biçimindedir. Bu nedenle $z \mapsto Z$ tasviri düzlemdeki çemberleri S küresi üzerindeki çemberlere resmeder.

$$a=\frac{\alpha_1}{\alpha_0-\alpha_3},\ b=\frac{\alpha_2}{\alpha_0-\alpha_3},\ r^2-a^2-b^2=-\frac{\alpha_0+\alpha_3}{\alpha_0-\alpha_3}$$

eşitliklerini $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ için çözmek sıkıcıdır. Bunun yerine, (1) çemberinin $z \mapsto Z$ tasviri altındaki görüntüsünü belirleyelim. (24)-(26) bağıntıları ile birlikte

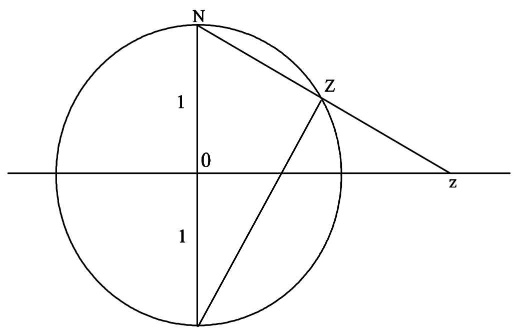
$$1-x_3=\frac{2}{1+|z|^2}$$

eşitliğinden, (1) bağıntısı

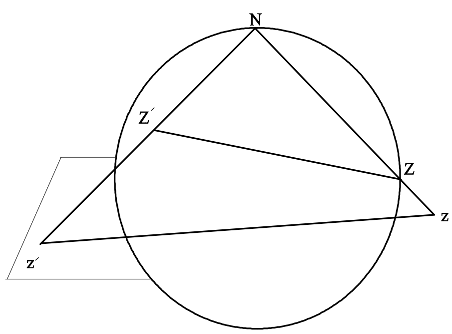
$$ax_1+bx_2+\frac{1-r^2-a^2-b^2}{2}x_3=\frac{a^2+b^2-r^2+1}{2}$$

biçimini alır. Bu ise düzlemin küre ile orijine olan uzaklığı en fazla 1 olacak biçimde kesiştiğini ifade eder.

▶ (28) formülü geometrik olarak aşağıdaki gibi ispatlanabilir (Alıştırma 4):



Şekil 1.1



Şekil 1.2

$Z \in S$ düzlemde olsun. Bu halde, $x_2 = 0$ olur. Z noktasındaki açılar diktir ve üçgenlerin benzerliğinden,

$$\frac{d(N,Z)}{2} = \frac{1}{d(N,z)} = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{d(N,Z)}{d(N,z')} = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z'|^2}}$$

olur. Aynı zamanda simetriden

$$\frac{d(N,Z')}{d(N,z)} = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z'|^2}}$$

dir. $\overset{\triangle}{NZZ'}$ ve $\overset{\triangle}{Nzz'}$ üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{d(Z,Z')}{|z-z'|} = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z'|^2}}$$

çıkar. Böylece (28) formülü ispatlanmış olur.

▶ Son olarak $z \mapsto Z$ küresel gösterilişinin **konform** olduğunu gösterelim. Bu şu demektir: Eğer ℓ ve m, düzlemde bir z noktasında α açısıyla kesişen iki doğru ise, bunlara karşı gelen, N ve Z den geçen C ve D çemberleri de Z noktasında aynı α açısıyla kesişir. S küresine N noktasında teğet olan π teğet düzlemini gözönüne alalım. ℓ ve Z den geçen düzlem π ile ℓ' doğrusunda kesişir. Benzer biçimde m ve Z den geçen düzlem π ile m' doğrusunda kesişir. Böylece apaçık biçimde, ℓ' ve m' doğruları N de aynı α açısıyla kesişir. ℓ' ve m' doğruları, C ve D çemberlerine N de teğet olduklarından, C ve D çemberleri hem N hem de Z noktasında aynı α açısıyla kesişmek zorundadır.