Ders #10: Özel Cauchy Formülü ve Uygulamaları

(Ders kitabında 118-126. sayfalar)

Ders #10 ile ilgili uyarılar

108. Sayfadaki 6. Alıştırmanın çözümü

$f(z)$ nin değerleri, $Log w$ nin tanımlı olduğu yarıklı düzlemde kapsanan, $|w-1|<1$ dairesi içindedir. Bu nedenle $Log f(z)$ fonksiyonu Ω içinde iyi tanımlı ve holomorfiktir, türevi

$$\frac{1}{f(z)}\,f'(z)$$

dir. Bu nedenle, ilkel fonksiyon teoremiyle

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$$

bulunur.

120. Sayfadaki 2. Alıştırmanın çözümü

$w=\varphi(z)=-z$ değişken dönüşümüyle

$$\int_{\varphi(\gamma)} \frac{dw}{w^2+1} = \int_\gamma \frac{-dz}{z^2+1}$$

bulunur. $\varphi(\gamma) = \gamma$ (yönlendirmesiyle birlikte) olduğundan, integralin değeri 0 olur. Ayrıca

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}$$

biçiminde yazılabileceğinden ve

$$n(\gamma, i) = n(\gamma, -i)$$

eşitliğinden yine tüm integral 0 dır.

120. Sayfadaki 3. Alıştırmanın çözümü

$|z| = \rho$ çemberi üzerinde, $z = \rho e^{i\theta}$ yazabiliriz. Böylece

$$\frac{dz}{d\theta} = \rho e^{i\theta} i$$

ve

$$\frac{dz}{z} = i d\theta$$

olduğundan

$$|dz| = \rho d\theta = -i\rho \frac{dz}{z}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2} &= -i\rho \int_{|z|=\rho} \frac{dz}{z(z-a)(\frac{\rho^2}{z} - \overline{a})} \\
&= -i\rho \left[\frac{1}{\rho^2 - |a|^2} \int_{|z|=\rho} \frac{dz}{z-a} + \frac{\overline{a}}{\rho^2 - |a|^2} \int_{|z|=\rho} \frac{dz}{\rho^2 - \overline{a}z} \right]
\end{aligned}$$

olur. $|a| > \rho$ ise, birinci integralin değeri 0 dır. İkinci integralin değeri

$$\frac{1}{\overline{a}} \int_{|z|=\rho} \frac{dz}{\frac{\rho^2}{\overline{a}} - z} = -2\pi i \frac{1}{\overline{a}}$$

dir ve sonuç olarak

$$\int_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \frac{2\pi\rho}{|a|^2 - \rho^2}$$

bulunur.

$|a| < \rho$ ise, ikinci integralin değeri 0 dır. Birinci integralin değeri

$$\int_{|z|=\rho} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

dir ve

$$\int_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \frac{2\pi\rho}{\rho^2 - |a|^2}$$

olur. Böylece her iki durumda da sonuç olarak

$$\left| \frac{2\pi\rho}{\rho^2 - |a|^2} \right|$$

bulunur.

▶ ss.125-126 da ispatlanan Taylor Teoremi (kalan terimli) aşağıdaki biçimde verilmelidir:

Teorem 1. (Taylor Teoremi) *$f(z)$ fonksiyonu a noktasını içeren bir Ω bölgesinde analitik ise $f_n(z)$, Ω bölgesinde analitik olmak üzere*

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \cdots + \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + f_n(z)(z-a)^n$$

dir. Bundan başka eğer C, Ω bölgesince kapsanan a merkezli kapalı bir dairenin sınırı ise $f_n(z)$ aşağıdaki gösterilişe sahiptir:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)} \quad (z, C \text{ nin içinde})$$