18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

Ders #11: Ayrık Tekil Noktalar

(Ders kitabında 126-130. sayfalar)

Ders #11 ile ilgili uyarılar

Tekil Noktalar:

$f(z)$, a merkezi silinmiş $0 < |z-a| < \delta$ dairesi içinde holomorfik olsun.

(i) Eğer

$$\lim_{z \to a} f(z)$$

limiti var veya sadece

$$\lim_{z \to a} f(z)(z-a) = 0$$

ise a noktasına kaldırılabilir tekil nokta denir ve f, tüm $|z-a| < \delta$ dairesinde holomorf olan bir fonksiyona genişletilebilir.

(ii) Eğer

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

ise a noktasına bir kutup noktası denir. Bu durumda h bir pozitif tamsayı, $f_h(z)$ fonksiyonu a noktasında holomorfik ve $f_h(a) \neq 0$ olmak üzere

$$f(z) = (z-a)^{-h} f_h(z)$$

biçimindedir. Buna ek olarak $\varphi(z)$ fonksiyonu a noktasında holomorfik olmak üzere, $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = B_h(z-a)^{-h} + \cdots + B_1(z-a)^{-1} + \varphi(z)$$

biçiminde Laurent açılımına sahiptir.

(i) ve (ii) den ikisi de geçerli değilse a noktasına bir esaslı tekil nokta denir.

Teorem 9. *Bir holomorfik fonksiyon, bir esaslı tekil noktanın her komşuluğunda her kompleks sayıya keyfi derecede yakındır.*

Basitleştirilmiş ispat: İddianın doğru olmadığını varsayalım. Bu durumda $\exists A \in \mathbb{C}$ ve $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ öyle ki

$$|z-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - A| > \delta.$$

Bu halde

$$\lim_{z \to a} (z-a)^{-1} (f(z) - A) = \infty$$

olur. Bu nedenle

$$(z-a)^{-1} (f(z) - A)$$

fonksiyonu $z = a$ noktasında bir kutba sahiptir. Buradan $h \in \mathbb{Z}^+$ ve $g(z)$ fonksiyonu $z = a$ da holomorfik olmak üzere

$$f(z) - A = (z-a)(z-a)^{-h} g(z)$$

bulunur.

$h = 1$ ise, $f(z)$ fonksiyonu $z = a$ da kaldırılabilir tekil noktaya sahiptir. $h > 1$ ise, $f(z) - A$ fonksiyonu $z = a$ da bir kutba sahiptir ve dolayısıyla $f(z)$ fonksiyonu da $z = a$ da bir kutba sahiptir. Her iki durum da varsayımda dışlandığından ispat tamamlanmış olur. ■

130. Sayfadaki 4. Alıştırmanın çözümü

f fonksiyonu $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ da meromorfik olsun. f nin bir rasyonel fonksiyon olduğunu ispatlamalıyız. ∞ bir kutup noktası ise, $g = \dfrac{1}{f}$ ile çalışırız. Bu nedenle ∞ un bir kutup noktası olmadığını varsayalım. ∞ noktası bir esaslı tekil nokta olmadığından kaldırılabilir tekil noktadır. Bu nedenle $R > 0$ olmak üzere, $f(z)$ fonksiyonu $|z| \geq R$ için sınırlıdır. $f(z)$ nin kutupları ayrık olduğundan, $|z| \leq R$ dairesi içinde yalnızca sonlu sayıda kutbu vardır. ($f(z)$ nin kutupları $1/f(z)$ nin sıfırlarıdır.) $z = a$ kutup noktasının civarında Laurent açılımı kullanılarak, $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = B_h (z-a)^{-h} + \cdots + B_1 (z-a)^{-1} + \varphi(z)$$

biçiminde yazılabilir. Bu son eşitlik, φ nin $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ üzerinde $f(z)$ den bir kutbu az olan meromorfik bir fonksiyona genişletilebileceğini gösterir. O halde yukarıda yaptığımız tartışmayı $\varphi(z)$ için yapıp, bu şekilde devam ederek, g fonksiyonu $\mathbb{C}$ de holomorfik ve P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ polinomlar olmak üzere

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} P_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right) + g(z)$$

elde edilir. Bu son bağıntı bize g nin $|z| \geq R$ için sınırlı ve $|z| < R$ de analitik olduğunu gösterir. Bu nedenle $f(z)$ tüm $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde sınırlı olmalıdır. Liouville teoremi nedeniyle $f(z)$ sabittir. Böylece f bir rasyonel fonksiyondur.