18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

Ders #13: Genelleştirilmiş Cauchy Teoremi

(Ders kitabındaki 137-148. sayfalar yerine)

Burada Cauchy Teoreminin genel biçiminin kısa bir kanıtı verilecektir. (bkz. John D. Dixon, A brief proof of Cauchy's integral theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **29**, (1971), 625-626.)

Tanım 1 *Bir Ω açık kümesi içindeki bir γ kapalı eğrisi için*

$$n(\gamma, a) = 0 \qquad (\forall a \notin \Omega)$$

gerçekleniyor ise, γ kapalı eğrisine Ω ya göre 0 a ***homologdur*** *denir (kısaca $\gamma \sim 0$ yazılır).*

Tanım 2 *Genişletilmiş düzleme göre bütünleyeni bağlantılı olan bir bölgeye* ***basit bağlantılıdır*** *denir.*

Uyarı: Ω basit bağlantılı ve $\gamma \subset \Omega$ kapalı ise Ω ya göre $\gamma \sim 0$ dir. Aslında $\Omega - \gamma$ nın her bileşeninde $n(\gamma, z)$ sabittir ve bu nedenle yeterince büyük z ler için $n(\gamma, z) = 0$ dır.

Teorem 1 (Cauchy Teoremi) *f bir Ω açık kümesi içinde analitik ise $\gamma \sim 0$ olacak biçimdeki her kapalı $\gamma \subset \Omega$ eğrisi için*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

dır. Özel olarak, Ω basit bağlantılı ise her kapalı $\gamma \subset \Omega$ için $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ dır.

İlk olarak aşağıdaki teoremi kanıtlayalım.

Teorem 2 (Cauchy İntegral Formülü) *f fonksiyonu bir Ω açık kümesi içinde holomorfik olsun. Bu durumda, Ω ya göre $\gamma \sim 0$ olmak üzere*

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{1}$$

dır.

İspat: İspat aşağıdaki üç iddiaya dayanmaktadır.

$\Omega \times \Omega$ üzerinde $g(z,\zeta)$ fonksiyonunu

$$g(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & , z \neq \zeta \\ f'(z) & , z = \zeta \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım.

İddia 1: *g fonksiyonu $\Omega \times \Omega$ üzerinde süreklidir, her değişken için holomorftur ve $g(z,\zeta) = g(\zeta,z)$ dir.*

Apaçık biçimde, g fonksiyonu $\Omega \times \Omega$ içindeki köşegenin dışında süreklidir. $(z_{0,}z_0)$ köşegen üzerindeki bir nokta ve $D \subset \Omega$, z_0 merkezli bir daire olsun. D de $z \neq \zeta$ olsun. Teorem 8 (s. 125) nedeniyle

$$g(z,\zeta) - g(z_{0,}z_0) = f'(\zeta) + \frac{1}{2} f_2(z)(z-\zeta) - f'(z_0)$$

olur. Bu nedenle (z_0, z_0) noktasındaki süreklilik açıktır.

Holomorfik oluşu iddiası için, her $\zeta_0 \in \Omega$ için

$$z \mapsto g(z, \zeta_0)$$

fonksiyonunun $\Omega - \zeta_0$ da holomorfikliği açıktır.

$$\lim_{z \to \zeta_0} g(z,\zeta_0)(z-\zeta_0) = 0$$

olduğundan ζ_0 noktası kaldırılabilir tekil noktadır (Teorem 7, s. 124). Böylece

$$z \mapsto g(z, \zeta_0)$$

fonksiyonu gerçekten Ω da holomorfiktir. Böylece İddia 1) kanıtlanmış olur.

$$\Omega' = \{z \in \mathbb{C} - (\gamma) : n(\gamma, z) = 0\}$$

olsun. $\mathbb{C}$ üzerinde bir h fonksiyonunu aşağıdaki biçimde tanımlayalım:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z,\zeta)\, d\zeta, \quad z \in \Omega; \tag{2}$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}\, d\zeta, \quad z \in \Omega'. \tag{3}$$

Her iki ifade de $\Omega \cap \Omega'$ üzerinde aynı olduğundan ve ayrıca $\Omega \cap \Omega' = \mathbb{C}$ olduğundan, yukarıdaki tanım geçerli bir tanımdır.

İddia 2: *h fonksiyonu holomorfiktir.*

Ω' ve $\Omega - \gamma$ açık kümeleri üzerinde iddianın doğruluğu açıktır. $z_0 \in \gamma$ noktasında holomorf olduğunu göstermek için z_0 merkezli $D \subset \Omega$ dairesini gözönüne alalım. δ, D de herhangi bir kapalı eğri olsun. Bu halde,

$$\begin{aligned}
\int_\delta h(z)\, dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_\delta \left(\int_\gamma g(z,\zeta)\, d\zeta \right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\int_\delta g(z,\zeta)\, dz \right) d\zeta
\end{aligned}$$

olur. Her ζ için

$$z \mapsto g(z,\zeta)$$

fonksiyonu D üzerinde (hatta Ω üzerinde) holomorfiktir. Daireler için Cauchy teoremi nedeniyle

$$\int_\delta g(z,\zeta)\, dz = 0$$

olur. Morera Teoreminden h nın holomorfik olduğu çıkar.

İddia 3: *$h \equiv 0$ dır ve böylece (1) geçerlidir*

Yeterince büyük $|z|$ için $z \in \Omega'$ dir. Bu nedenle (3) ten

$$\lim_{z \to \infty} h(z) = 0$$

bulunur. Liouville Teoreminden, $h \equiv 0$ *çıkar.* ■

Teorem 1 in ispatı: Cauchy Teoremini çıkarmak için, $z_0 \in \Omega - \gamma$ olsun ve

$$F(z) = (z - z_0) f(z)$$

yazalım. (1) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\ dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{F(z)}{z-z_0}\ dz \\ &= n(\gamma, z_0)F(z_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. ■

Son olarak şunu not edelim: 142. sayfadaki Sonuç 2 Cauchy Teoreminin doğrudan bir sonucudur.