18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

Ders #14: Rezidü Teoremi ve Uygulamaları

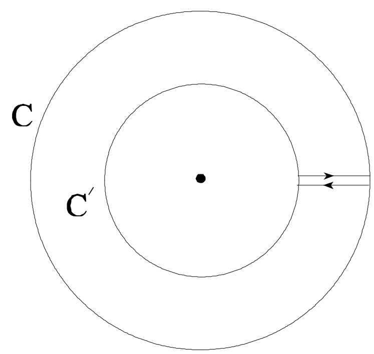
(Ders kitabındaki 148-154. sayfalar yerine)

Ω kompleks düzlemde bir bölge ve $a \in \Omega$ olsun. $f(z)$ fonksiyonu $\Omega' = \Omega - a$ içinde holomorfik olsun.

Tanım 1. C, a merkezli Ω da kapsanan herhangi bir çemberi göstermek üzere f fonksiyonunun $z = a$ daki **rezidüsü**

$$R = \mathrm{Res}_{z=a}\, f(z) \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz$$

ile tanımlanır.



Eğer C', a merkezli ve Ω da kapsanan başka bir çember ise halkasal bölge için Cauchy Teoremi

$$\mathrm{Res}_{z=a}\, f(z)$$

nün, C nin seçiminden bağımsız olduğunu gösterir. Yukarıdaki tanımın, ders kitabı sayfa 149. daki Tanım 3. e denk olduğu gösterilebilir. Fakat, bunu burada göstermeyeceğiz.

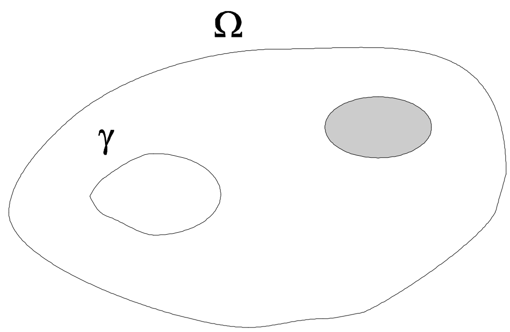
Ders kitabı sayfa 150 deki Teorem 17 yerine aşağıdaki teoremi kanıtlayalım:

Teorem 17′. f bir Ω bölgesinde a_j ayrık tekil noktaları dışında analitik olsun. γ, içi Ω da kapsanan basit kapalı bir eğri ve $a_j \notin \gamma$ (her j için) olsun. Bu durumda,

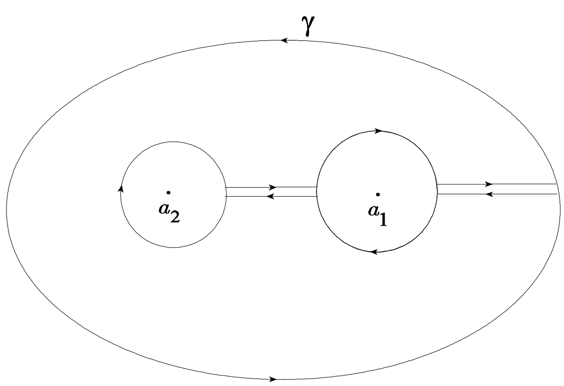
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_j \mathrm{Res}_{z=a}\, f(z)$$

dir.

İspat:



γ ve içinin kompaktlığından yukarıdaki toplam sonludur. Basitlik için, γ içindeki tekil noktalar a_1, a_2 olsun.



γ nın dışı bağlantılıdır. a_1 ve a_2 yi kapsayan D_1 ve D_2 disklerini alır ve bunların sınırlarını, Şekil 14.3 teki gibi, "köprülerle" γ ya birleştirirsek γ içinde kalan kısım basit bağlantılı olur (bütünleyeni bağlantılıdır). Böylece, bu bölgenin sınırı üzerindeki integral 0 olur.

Köprülerin genişliğini 0 a yaklaştırılırsa, teorem kanıtlanmış olur. ■

Rezidülerin Hesabı

1. *Eğer*

$$\lim_{z \to a} f(z)(z-a)$$

var ve sonlu ise, bu $\mathrm{Res}_{z=a} f(z)$ *ye eşittir.*

Gerçekten $z = a$ noktası $f(z)$ nin bir kutup noktasıdır, bu nedenle

$$f(z) = B_h(z-a)^{-h} + \cdots + B_1(z-a)^{-1} + \varphi(z), \quad B_h \neq 0$$

biçimindedir. O halde

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz = B_1$$

dir. Yukarıdaki singüler kısım

$$(z-a)^{-h}\left(B_h + B_{h-1}(z-a) + \cdots + B_1(z-a)^{h-1}\right)$$

ye eşittir ve limitin sonluluğundan $h \leq 1$ çıkar.

2. $g(a) \neq 0$ *ve* $h(z)$ de $z = a$ *da basit sıfırı olan bir fonksiyon olmak üzere,* $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ *biçiminde ise,*

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

dır.

Gerçekten,

$$\lim_{z \to a} f(z)(z-a) = \lim_{z \to a} g(z) \frac{1}{\dfrac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

bulunur.

3. *Eğer* f *nin* h*.ıncı mertebeden bir kutbu varsa*

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(h-1)!} \left\{ \frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}} (z-a)^h f(z) \right\}_{z=a}$$

dır.

Gerçekten g, $z = a$ da holomorf olmak üzere

$$f(z) = (z-a)^{-h} g(z)$$

yazılabilir. Bu nedenle

$$g^{(h-1)}(a) = (h-1)!\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)}{(z-a)^h}\,dz = (h-1)!\,\mathrm{Res}_{z=a}\,f(z)$$

olur.

Örnek: (Ders kitabındaki 151. sayfa)

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-a)^2} \Longrightarrow \mathrm{Res}_{z=a}\,f(z) = \left(\frac{d}{dz}e^z\right)_{z=a} = e^a$$

bulunur.

Uygulama: Argüman Prensibi.

Teorem 18' *$\gamma \subset \Omega$ içi Ω da kapsanan basit kapalı bir eğri ve f, Ω da meromorf olsun. γ nın f nin sıfır yerlerinden ve kutuplarından geçmediğini varsayalım. Bu durumda*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P$$

dir. Burada, N ve P katlılıkları ile birlikte f nin γ içindeki sıfırlarının ve kutuplarının sayısıdır.

İspat: Teorem 17' den, integralin değeri $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ nin rezidülerinin toplamına eşittir. $z = a$, f nin h.ıncı mertebeden sıfır noktası ise

$$f(z) = (z-a)^h f_h(z), \qquad f_h(a) \neq 0$$

yazılabilir ve

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h}{z-a} + \frac{f_h'(z)}{f_h(z)} \Longrightarrow \mathrm{Res}_{z=a}\frac{f'(z)}{f(z)} = h$$

olur.

$z = b$, f nin k.ıncı mertebeden kutup noktası ise, benzer biçimde

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k}{z-b} + \frac{f_h'(z)}{f_h(z)} \Longrightarrow \mathrm{Res}_{z=b}\frac{f'(z)}{f(z)} = -k$$

bulunur. Böylece Teorem 17' den istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 1 (Rouche Teoremi) f ve g bir Ω *bölgesinde holomorf olsun. $\gamma \subset \Omega$ içi Ω da kapsanan basit kapalı bir eğri olsun.* γ üzerinde

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda, f ve g nin γ içindeki sıfır yerlerinin sayısı, N_f ve N_g, aynıdır.

İspat: (Ders kitabında f ve g nin ortak sıfırlarının olması durumu dikkate alınmamıştır.) Eşitsizlikten, f ve g nin γ üzerinde sıfırları olmadığı çıkar.

$$\psi(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$$

denirse, γ üzerinde

$$|\psi(z) - 1| < 1$$

olur. Böylece, $\Gamma = \psi(\gamma)$ eğrisi $|\zeta - 1| < 1$ diski içindedir. Bu nedenle

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\,dz = \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = n(\Gamma, 0) = 0 \qquad \text{(ders kitabı 116. sayfa)}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} N_g &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\psi' f + \psi f'}{\psi f}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \\ &= N_f \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

154. Sayfadaki 2. Alıştırmanın çözümü

İlk olarak $\gamma : |z| = 2$ ve sonra $\gamma : |z| = 1$ üzerinde Rouche teoremini iki kez kullanalım:

$\gamma : |z| = 2$ için, $f(z) = z^4$ ve $g(z) = z^4 - 6z + 3$ alalım.

$\gamma : |z| = 1$ için, $f(z) = -6z$ ve $g(z) = z^4 - 6z + 3$ alalım.