18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

Ders #15: Çevre Üzerindeki İntegraller ve Uygulamaları

(Ders kitabında 154-161 sayfalar)

Ders #15 ile ilgili uyarılar

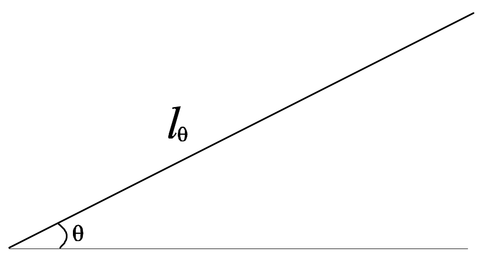
4. ve 5. bölümlerde (ss. $154-160$) logaritmanın kullanımıyla ilgili olarak bazı açıklamalar gereklidir.

Sayfa 159 daki 4. problemin çözümü

İspat için önemli olan

$$(-z)^{2\alpha} = e^{2\pi i\alpha} z^{2\alpha}$$

formülü bir açıklama hak ediyor.



$$\theta < \arg_\theta z < \theta + 2\pi$$

olmak üzere $\mathbb{C} - l_\theta$ bölgesinde (düzlemden l_θ ışınının çıkarılmasıyla elde edilen bölge)

$$\log_\theta z = \log|z| + i \arg_\theta z$$

fonksiyonunu gözönüne alalım:

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x)dx$$

integralini hesaplamak için $\mathbb{C}$ den negatif reel eksenin çıkarılmasıyla elde edilen bölgede $\log_{-\frac{\pi}{2}}(z)$ fonksiyonunu gözönüne alalım ve Şekil **4.13** teki yol üzerinde Rezidü teoremini uygulayalım: Ders kitabında olduğu gibi

$$\int_{-\infty}^\infty z^{2\alpha+1} R(z^2)dz = \int_0^\infty \left(z^{2\alpha+1} + (-z)^{2\alpha+1}\right) R(z^2)dz$$

integrali bulunur.

Sağ tarafta $z \in (0, \infty)$ ve

$$\begin{aligned}
\log_{-\frac{\pi}{2}}(z) &= \log|z| + \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) i, \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg_{-\frac{\pi}{2}} z < \frac{3\pi}{2} \\
\log_{-\frac{\pi}{2}}(-z) &= \log|z| + \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) i \\
&= \log_{-\frac{\pi}{2}}(z) + i\pi, \qquad z > 0
\end{aligned}$$

dir. Böylece $z > 0$ için,

$$\begin{aligned}
(-z)^{2\alpha+1} &= e^{(2\alpha+1)\log_{-\frac{\pi}{2}}(-z)} \\
&= e^{(2\alpha+1)\left(\log_{-\frac{\pi}{2}}|z| + i\pi\right)} \\
&= -e^{2\alpha i\pi} z^{2\alpha+1}
\end{aligned}$$

olduğundan, sağ taraftaki integral

$$\left(1 - e^{2\alpha i\pi}\right) \int_0^\infty z^{2\alpha+1} R(z^2) dz$$

olur.

$z > 0$ için yukarıdaki ifadeden

$$\log_{-\frac{\pi}{2}}(z) = \log|z|$$

bulunur ve bu nedenle de

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty z^{2\alpha+1} R(z^2) dz &= \frac{1}{2\pi i} \left(1 - e^{2\alpha i\pi}\right) \int_0^\infty x^{2\alpha+1} R(x^2) dx \\
&= -\frac{1}{\pi} e^{\alpha\pi i} \sin \pi\alpha \int_0^\infty x^{2\alpha+1} R(x^2) dx \qquad (1)
\end{aligned}$$

olur. (1) in sol tarafı

$$z^{2\alpha+1} R(z^2) = f(z)$$

fonksiyonunun üst yarı düzlemdeki rezidülerinin toplamıdır. Burada g ve h holomorfik fonksiyonlar, $g(a) \neq 0$ *ve* $h(z)$ nin $z = a$ da basit sıfırı olmak üzere

$$R(z^2) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

biçiminde ise

$$z^{2\alpha+1} = e^{(2\alpha+1)\log_{-\frac{\pi}{2}}(z)}$$

için

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = z^{(2\alpha+1)}(a)\frac{g(a)}{h'(a)} \tag{2}$$

bulunur.

<u>Örnek: Sayfa 161 deki Alıştırma 3(g)</u>

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

integralini hesaplamak için $x = t^2$ yazalım.

$$\int_{-\infty}^\infty z^{\frac{5}{3}} \frac{dz}{1+z^4}$$

olur. Üst yarı düzlemdeki kutup noktaları

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \text{ve} \qquad z = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

dir. Rezidüleri hesaplamak için (2) yi kullanalım:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} \left(z^{\frac{5}{3}} \frac{1}{1+z^4}\right) &= z^{\frac{5}{3}}(e^{i\frac{\pi}{4}}) \frac{1}{4\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3} \\
&= e^{\frac{5}{3}\log_{-\frac{\pi}{2}}(e^{i\frac{\pi}{4}})} \frac{1}{4\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3} \\
&= e^{\frac{5}{3}(i\frac{\pi}{4})} \frac{1}{4\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3} \\
&= \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \left(z^{\frac{5}{3}} \frac{1}{1+z^4}\right) &= z^{\frac{5}{3}}(e^{i\frac{3\pi}{4}}) \frac{1}{4\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^3} \\
&= e^{\frac{5}{3}\log_{-\frac{\pi}{2}}(e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{4}\right)})} \frac{1}{4\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^3} \\
&= \frac{1}{4} e^{-i\pi}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (1) den

$$\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{4}e^{-i\pi} = -\frac{1}{\pi}e^{\frac{1}{3}\pi i}\sin\frac{\pi}{3}\int_0^\infty x^{\frac{5}{3}}\frac{dx}{1+x^4}$$

ve sonuç olarak

$$\int_0^\infty x^{\frac{5}{3}}\frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

bulunur.

Sayfa 160 daki Örnek 5

Logaritmanın belirli bir dalı seçildiğinden, Sayfa 160 daki son dört cümle biraz yanıltıcıdır. Bu nedenle

$$\int_0^\pi Log(-2ie^{ix}\sin x)\ dx = 0$$

denkleminden sonraki ispatın devamı aşağıdaki gibidir:

Ders #2 den

$$Log\,(z_1z_2) = Log(z_1) + Log(z_2), \qquad -\pi < Arg(z_1) + Arg(z_2) < \pi \tag{3}$$

olduğunu biliyoruz.

Bunu $z = 2\sin x$ için kullanırsak,

$$\int_0^\pi \log(2\sin x)\ dx + \int_0^\pi Log(-ie^{ix})\ dx = 0 \tag{4}$$

buluruz. Fakat $-\frac{\pi}{2} + x \in (-\pi, \pi)$ olduğundan

$$Log(-i) = -\frac{\pi i}{2}, \qquad Loge^{ix} = ix \ \ (0 < x < \pi)$$

dir ve (3) den

$$Log\left(-ie^{ix}\right) = -\frac{\pi i}{2} + ix$$

çıkar. Bu halde (4) eşitliğinden

$$\int_0^\pi \log\sin\theta\ d\theta = -\pi\log 2$$

elde edilir.