18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

Ders #16: Harmonik Fonksiyonlar

(Ders kitabında 162-170. sayfalar yerine)

$\int_\gamma f(z)\ dz$ ve $\int_\gamma M\ dx + N\ dy$ biçimindeki integraller kitapta (s. 101) tanımlanmış olmasına rağmen dx, dy ve $dz = dx + idy$ biçimindeki diferansiyel formlar henüz tanımlanmadı (ve bu tanım oldukça hassastır), diferansiyel formlar (ss.$162 - 170$) olmadan harmonik fonksiyonlar teorisini geliştirmeyi istiyoruz.

Tanım 1 *Bir Ω bölgesinde reel değerli $u(z) = u(x,y)$ fonksiyonu, $u \in C^2$ ve*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

denklemini sağlıyorsa, harmoniktir.

Holomorfik bir fonksiyon için Cauchy-Riemann denklemleri açık bir biçimde holomorfik fonksiyonun gerçel ve sanal kısımlarının harmonik olduğunu ifade eder. Tersi ancak Ω basit bağlantılı ise doğrudur.

Teorem 1 *Ω basit bağlantılı ve u reel değerli fonksiyonu Ω da harmonik ise*

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z)$$

olacak biçimde bir $f(z)$ holomorfik fonksiyonu vardır.

Uyarı: *Dikkat edilirse $\underline{\Omega \text{ nın basit bağlantılı}}$ olması koşulundan vazgeçilemez. Örneğin, $u(z) = \log|z|$ fonksiyonu $\mathbb{C} - \{0\}$ delikli düzleminde harmonik olmasına rağmen bir holomorfik fonksiyonun reel kısmı olarak yazılamaz.*

İspat:

$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = u_1 + iv_1$$

yazalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial v_1}{\partial x} \end{aligned}$$

olur. Cauchy-Riemann denklemlerinden g nin holomorfik olduğu çıkar. s. 142 den, Ω basit bağlantılı olduğundan, bir f holomorfik fonksiyonu için

$$g(z) = f'(z)$$

yazılabilir.

$$f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$$

yazılırsa, Cauchy-Riemann denklemlerinden

$$g(z) = f'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y}$$

olur ve buradan

$$u(x,y) = U(x,y) + \text{sabit}$$

bulunur. Böylece

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) + \text{sabit}$$

elde edilir. ■

Sonuç 1 (s. 134 deki (34) ile karşılaştırınız) *u, Ω da harmonik ve $|z - z_0| \leq r \subset \Omega$ ise*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

dır.

Daha genel olarak, $r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2$ halkasal bölgesi Ω da kapsanıyor ise aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 2 *u, Ω da harmonik ve $\{z : r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\} \subset \Omega$ ise,* α ve β reel sabitler olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta = \alpha \log r + \beta, \qquad r_1 \leq r \leq r_2 \tag{1}$$

dir.

İspat: $z \longmapsto u(z_0 + z)$ fonksiyonu harmoniktir, kutupsal koordinatlardaki Laplace operatörü

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

dir. (1) in sol tarafı $V(r)$ ile gösterilirse,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

olur. Bu son ifade

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

biçiminde yazılırsa ispat tamamlanmış olur. ■

Poisson Formülü

u, $|z| \leq 1$ de harmonik olsun. f, $|z| \leq 1$ de holomorfik olmak üzere

$$u = \mathrm{Re}(f)$$

yazılabilir. Birim daireyi kendi üzerine resmeden

$$S(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z}, \qquad (|a| < 1)$$

dönüşümünü gözönüne alalım. Bu durumda, $f \circ S$ holomorfiktir ve $u \circ S$ ($f \circ S$ nin reel kısmı) harmoniktir. $z_0 = 0$ için yukarıdaki sonuç kullanılırsa,

$$u(a) = u(S(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(S(e^{i\varphi})\, d\varphi$$

olur. Öte yandan

$$S(e^{i\varphi}) = \frac{e^{i\varphi}+a}{1+\overline{a}e^{i\varphi}} = e^{i\theta}$$

ve

$$e^{i\varphi} = \frac{e^{i\theta}-a}{1-\overline{a}e^{i\theta}}$$

bulunur. Buradan

$$ie^{i\varphi}\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{ie^{i\theta} - |a|^2\, ie^{i\theta}}{\left(1-\overline{a}e^{i\theta}\right)^2}$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\theta} &= \frac{ie^{i\theta} - |a|^2\, ie^{i\theta}}{\left(1-\overline{a}e^{i\theta}\right)^2} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{1-\overline{a}e^{i\theta}}{e^{i\theta}-a} \\ &= \frac{1-|a|^2}{\left|e^{i\theta}-a\right|^2} \end{aligned} \qquad (2)$$

bulunur. Bu ise Poisson Formülünü (kitaptaki (63) numaralı formül) verir:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\ \frac{d\varphi}{d\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \frac{1-|a|^2}{|z-a|^2} u(z)\ d\theta.$$

Schwarz Teoremi

Teorem 2 (Schwarz Teoremi) *U, $|z|=1$ üzerinde parçalı sürekli bir reel fonksiyon olsun ve onun Poisson integrali $u(z) = P_U(z)$*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|a|^2}{|a-e^{i\varphi}|^2} U(e^{i\varphi})\ d\varphi, \qquad |a| < 1 \tag{3}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde u harmoniktir ve U, $e^{i\varphi_0}$ da sürekli ise

$$\lim_{z \to e^{i\varphi_0}} u(z) = U(e^{i\varphi_0})$$

dir.

İspat: $\varphi_0 = 0$ varsayabiliriz.

$$\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\varphi}|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\right)$$

olduğundan, u bir holomorfik fonksiyonun reel kısmıdır ve bu nedenle de harmoniktir.

(2) yardımıyla (3) formülü

$$u(S(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(S(e^{i\varphi}))\ d\varphi$$

biçiminde yazılabilir. $a = \tanh t$ alınırsa, $t \to \infty$ için

$$\begin{aligned} u(\tanh t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\left(\frac{e^{i\varphi}+\tanh t}{\tanh t e^{i\varphi}+1}\right)\ d\varphi \\ &\longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(1)\ d\varphi \\ &= U(1) \end{aligned}$$

bulunur. ■

Sayfa 171 deki 5. problemin çözümü

$\log|1+z|$ fonksiyonu $|z| < 1$ içinde harmonik olduğundan, ortalama değer teoreminden, $r < 1$ için

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|1+re^{i\theta}\right| \, d\theta = \log 1 = 0 \tag{4}$$

bulunur. Şimdi

$$\left|\log\left|1+re^{i\theta}\right|\right|$$

fonksiyonunun bir integrallenebilir $g(\theta)$ fonksiyonu ile sınırlı olduğunu gösterelim. Baskın yakınsaklık teoremi nedeniyle integral işareti altında $r \to 1$ iken limit alınırsa

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|1+e^{i\theta}\right| \, d\theta = 0 \tag{5}$$

istenilen sonucu elde edilir.

İntegrand $\log\left|1+e^{i\theta}\right|$ fonksiyonu çember üzerinde işaret değiştirdiğinden, çemberi $\left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ ve $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ biçiminde iki yaya ayıralım. Bu yaylar üzerinde sırasıyla

$$\left|1+e^{i\theta}\right| \geq 1$$

ve

$$\left|1+e^{i\theta}\right| \leq 1$$

dir. İlk aralıkta, $\cos\theta \geq -\frac{1}{2}$ olduğundan

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \left|1+re^{i\theta}\right| \leq \left|1+e^{i\theta}\right| = 2\cos\frac{\theta}{2}, \quad |\theta| \leq \frac{2\pi}{3} \text{ ve } r \geq \frac{1}{2} \tag{6}$$

olur. İkinci aralıkta, $\theta = \pi + \varphi$ yazılırsa, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{3}$ olduğundan, geometriden

$$1 \geq \left|1+re^{i\theta}\right| = \left|1-re^{i\varphi}\right| \geq 1-\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3} \tag{7}$$

görülür.

$\log\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$ integrallenebilir olduğundan, (6) ve (7) eşitsizlikleri $\left|\log\left|1+re^{i\theta}\right|\right|$ fonksiyonunun bir integrallenebilir $g(\theta)$ fonksiyonu ile sınırlı olduğunu gösterir. Böylece (5) sağlanır.