18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

Ders #17: Mittag-Leffer Teoremi

(Ders kitabında 187-190. sayfalar)

Teorem 1 (Mittag-Leffer Teoremi) $\{b_\nu\}$ dizisi

$$\lim_{\nu\to\infty} b_\nu = \infty$$

olacak biçimde $\mathbb{C}$ *de bir dizi ve* $P_\nu(\zeta)$ *sabit terimi olmayan polinomlar olsun. Bu durumda, kutupları yalnızca* b_ν *ve bunlara karşılık gelen tekil kısımları*

$$P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right)$$

olan ve $\mathbb{C}$ *de meromorfik* f *fonksiyonları vardır.*

Bu biçimdeki en genel $f(z)$ *fonksiyonu,* g *fonksiyonu* z *ye göre holomorfik ve* p_ν *ler polinomlar olmak üzere,*

$$f(z) = g(z) + \sum_\nu \left[P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right) - p_\nu(z)\right] \tag{1}$$

biçiminde yazılabilir.

İspat: Her ν için $b_\nu \neq 0$ varsayabiliriz. $P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right)$ nin $z=0$ noktası civarındaki Taylor serisini gözönüne alalım. Bu seri $|z| < |b_\nu|$ için yakınsaktır. $p_\nu(z)$, bu serinin z^{n_ν} ye kadar olan kısmi toplamlar dizisi olsun (n_ν daha sonra belirlenecek). 0 merkezli bir D diskinde

$$\varphi(z) = P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right)$$

sonlu Taylor serisini gözönüne alalım. Sayfa 126 daki (29) formülünden

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^n(\zeta - z)}\, d\zeta$$

dir. C yi 0 merkezli $\frac{|b_\nu|}{2}$ yarıçaplı çember ve $n = n_\nu + 1$ alınırsa, $M_\nu = \max_{z\in C}\left|P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right)\right|$ olmak üzere

$$\left|\varphi_{n_\nu+1}(z)\right| \le \frac{1}{2\pi} 2\pi \frac{|b_\nu|}{2} \frac{M_\nu}{\left(\frac{1}{2}|b_\nu|\right)^{n_\nu+1} \cdot \frac{|b_\nu|}{4}} \qquad \left(|z| \le \frac{|b_\nu|}{4} \text{ için}\right)$$

bulunur. Sayfa 125 teki Teorem 8 yardımıyla

$$\left|P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right)-p_\nu(z)\right| \leq 2M_\nu\left(\frac{2\,|z|}{|b_\nu|}\right)^{n_\nu+1} \qquad \left(|z| \leq \frac{|b_\nu|}{4} \text{ için}\right) \tag{2}$$

elde edilir. Şimdi n_ν yü

$$2^{n_\nu} \geq M_\nu 2^\nu$$

olacak biçimde yeterince büyük seçelim. Bu durumda

$$2M_\nu\left(\frac{2\,|z|}{|b_\nu|}\right)^{n_\nu+1} \leq 2^{-\nu} \qquad \left(|z| \leq \frac{|b_\nu|}{4} \text{ için}\right)$$

olur.

Şimdi iddia ediyoruz ki, (1) toplamı her $|z| \leq R$ diskinde (kutupları dışında) düzgün yakınsar ve bu nedenle de bir $h(z)$ meromorfik fonksiyonunu gösterir. Bunu görmek için (1) deki toplamı parçalayalım:

$$h(z) = \sum_{\frac{|b_\nu|}{4} \leq R}\left[P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right)-p_\nu(z)\right] + \sum_{\frac{|b_\nu|}{4} > R}\left[P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right)-p_\nu(z)\right]. \tag{3}$$

(2) eşitsizliğinden, $R \leq \dfrac{|b_\nu|}{4}$ olduğundan $|z| \leq R$ için ikinci toplam holomorfiktir. İlk toplam sonludur ve b_ν kutbundaki

$$P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right)$$

tekil kısma sahiptir.

Böylece teoremin varlık kısmı kanıtlanmış olur. f bu özelliklere sahip bir başka meromorfik fonksiyon ise $f(z)-h(z)$ holomorfiktir. ■

Sayfa 178 deki Alıştırma 3 Burada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$$

biçimindeki seriler için bazı hazırlıklar yapalım ve bunu

$$a_n = (-1)^n, v_n = (1+n)^{-s}, s = \sigma + it$$

için kullanalım.

Eğer

$$A_n = a_0 + \cdots + a_n$$

ise

$$A_0 v_0 + \sum_{n=1}^{N} (A_n - A_{n-1})\, v_n - \sum_{n=0}^{N-1} A_n\,(v_n - v_{n+1}) = A_N v_N$$

dir.

Yardımcı Teorem 1 *(A_n) sınırlı, $v_n \to 0$ ve*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n - v_{n+1}| < \infty$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n$ serisi yakınsaktır.

Yardımcı Teorem 1) in ispatı yukarıdaki özdeşlikten dolayı açıktır.

Örneğimizde

$$|v_n| = \left|(1+n)^{-s}\right| = \frac{1}{(1+n)^{\sigma}}$$

dir ve $\operatorname{Re} s > 0$ düzleminin her kompakt alt kümesi üzerinde $v_n \to 0$ düzgün yakınsar. $v_n - v_{n+1}$ için

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{(n+2)^s} = s \int_{n+1}^{n+2} x^{-s-1}\, dx$$

dir ve buradan

$$|v_n - v_{n+1}| \leq |s|\, \frac{1}{(n+1)^{\sigma+1}}$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s}$$

yakınsaktır. Bu seri $v_n \to 0$ ve $\sum |v_n - v_{n+1}|$ durumu olduğundan, gerçekte $\sigma > 0$ bölgesindeki kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsaktır.

<u>Sayfa 186 daki Alıştırma 1</u> Verilen bir

$$R_1 < |z-a| < R_2$$

halkasal bölgesinde

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_n\,(z-a)^{-n}$$

açılımı tektir çünkü katsayılar (3) ile belirlidir. Farklı bir halkasal bölge için (hatta aynı merkezli) verilen bir fonksiyonun açılımı farklı olabilir. Aşağıdakini gözönüne alalım:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-a} &= \frac{1}{z-b-(a-b)}\\ &= \frac{1}{1-\frac{z-b}{a-b}}\frac{1}{b-a}\\ &= \frac{1}{1-\frac{a-b}{z-b}}\frac{1}{z-b}.\end{aligned}$$

İlk formülden

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-b}{a-b})^n \qquad (0 < |z-b| < |a-b| \ \text{için})$$

ve ikincisinden

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-b}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{a-b}{z-b})^n \qquad (|a-b| < |z-b| < \infty \ \text{için})$$

elde edilir.