MIT Açık Ders Malzemeleri
http://ocw.mit.edu

18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

Bu materyallerden alıntı yapmak veya Kullanım Şartları hakkında bilgi almak için http://ocw.mit.edu/terms ve http://tuba.acikders.org.tr sitesini ziyaret ediniz.

Ders #18: Sonsuz Çarpımlar

(Ders kitabında 191-200. sayfalar)

Ders #18 ile ilgili uyarılar

197. sayfadaki 1. Problem *Varsayalım ki $a_n \to \infty$ (tümünün farklı olması koşulu kitapta eksik) ve A_n ler keyfi kompleks sayılar olsun. $f(a_n) = A_n$ gerçeklenecek biçimde bir tam fonksiyonun varlığını gösteriniz.*

İspat: (Kitaptaki yol göstermeye alternatif olan daha basit bir çözüm) $g(z)$ basit sıfırları a_n olan bir analitik fonksiyon olsun. Mittag-Leffer teoreminden, kutupları tam olarak a_n olan tekil kısmı

$$\frac{A_n/b_n}{z - a_n}$$

kesrine eşit $\mathbb{C}$ de bir h meromorfik fonksiyonu vardır. Bu durumda

$$f(z) = g(z)h(z)$$

fonksiyonu istenilen özelliğe sahiptir. ■

$\pi \cot \pi z$ nin formülü için uyarı (197. sayfa 8. satır)

$\sin \pi z$ nin çarpım formülü sonsuz çarpan içerdiğinden, logaritmik türev alma işlemi özenle yapılmalıdır. Genel olarak,

$$f(z) = \prod_{1}^{\infty} f_n(z) = \lim_{N\to\infty} \prod_{1}^{N} f_n(z) = \lim_{N\to\infty} g_N(z)$$

yazılırsa, yakınsaklık kompakt kümeler üzerinde düzgün olur. Teorem 1 den,

$$f'(z) = \lim_{N\to\infty} g_N'(z)$$

ve

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{N\to\infty} \frac{g_N'(z)}{g_N(z)}$$

olur. Burada $g_N'(z)/g_N(z)$, çarpımın türevi kuralıyla verilir. Bu hatırlatma (27) formülünün ispatını doğrular.

Kitapta Gamma fonksiyonu, §2.4 deki (29) çarpım formülü ile tanımlanmakta ve Lindelöf'ün bulduğu ilginç bir rezidü hesabından (42) integral formülü çıkarılmaktadır. Biz burada daha kısa bir şekilde ve integral formülü ile verilen tanımdan, çarpım formülünü çıkaracağız.

Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \qquad \operatorname{Re} z > 0$$

biçiminde tanımlanabilir.

$$f_n(z) = \int_0^n t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

yazılırsa, $f_n(z)$ fonksiyonu holomorfiktir ve

$$|\Gamma(z) - f_n(z)| \le \left| \int_n^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \right| \le \int_n^\infty e^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-t}\, dt$$

her $\operatorname{Re} z > \delta$ $(\delta > 0)$ yarı düzleminde 0 a düzgün yakınsar. Bu nedenle $\Gamma(z)$ fonksiyonu $\operatorname{Re} z > 0$ bölgesinde holomorfiktir. Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

(i) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ dir.

Bu özellik kısmi integrasyonla kolayca gösterilebilir.

(ii) $\Gamma(z)$ fonksiyonu $z = 0, -1, -2, ...$ noktalarında basit kutupları olan $\mathbb{C}$ de meromorfik bir fonksiyona genişletilebilir.

$$H(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

fonksiyonu $z = 0$ da kutbu olan $\operatorname{Re} z > -1$ de meromorfik bir fonksiyondur.

$$\lim_{z \to 0} zH(z) \neq 0$$

olduğundan, kutup noktası basittir. Rezidüsü $\Gamma(1) = 1$ dir. Hatta $\operatorname{Re} z > 0$ için $H(z) = \Gamma(z)$ dir. Böylece $\Gamma(z)$, $z = 0$ da basit kutba sahip $\operatorname{Re} z > -1$ de meromorfik olan fonksiyondur. (ii) iddiası bu şekilde devam ettirilerek gösterilebilir.

(iii) $x > 0, y > 0$ için

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

dir.

İspat:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \int_0^\infty s^{y-1} e^{-s}\, ds$$

$s = tv$ yazalım. İntegrandlar pozitif olduğundan, integraller yer değiştirebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \int_0^\infty t^y v^{y-1}e^{-tv}\,dv \\
&= \int_0^\infty v^{y-1}\,dv \int_0^\infty t^{x+y-1}e^{-(v+1)t}\,dt \qquad t = \frac{u}{1+v} \\
&= \int_0^\infty v^{y-1}\,dv \int_0^\infty u^{x+y-1}e^{-u}\,(1+v)^{-x-y}\,du \\
&= \Gamma(x+y)\int_0^\infty \frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}}\,dv \\
&= \Gamma(x+y)\int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}\,ds \qquad (1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade $v = s^{-1}(1-s)$ yazılmasıyla bulunur. Böylece (iii) kanıtlanmış olur.

(iv) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ dir.

(1) formülünden 161. sayfadaki Alıştırma 3(g) deki yöntemle (Ders #15)

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{v^{-x}}{1+v}\,dv$$

bulunur. Böylece meromorfik devamla (iv) kanıtlanmış olur.

$\Gamma(z)$ fonksiyonunun kutupları $\sin \pi z$ nin sıfırları ile sadeleştiğinden, $\Gamma(1-z)$ hiçbir zaman 0 olamaz. (iii) den $z = x + iy$ olmak üzere, $0 < h < \frac{x}{2}$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(z-h)\Gamma(h)}{\Gamma(z)} &= \int_0^1 t^{z-h-1}(1-t)^{h-1}\,dt \\
&= \int_0^1 (1-t)^{z-h-1}t^{h-1}\,dt \\
&= \frac{1}{h} + \int_0^1 \left[(1-t)^{z-h-1} - 1\right] t^{h-1}\,dt
\end{aligned}$$

bulunur.

İntegral işareti altında $h \to 0$ için baskın yakınsaklık teoremi kullanılır. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ aralığında integrand $h < \frac{x}{2}$ için düzgün olduğundan sınırlama için bir problem yoktur. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ aralığında ($\alpha = z - h - 1$ olmak üzere)

$$\left|\left((1-t)^{z-h-1} - 1\right) t^{h-1}\right| \le \left|\frac{(1-t)^\alpha - 1}{t}\right|$$

dir ve l'Hospital kuralından $|\alpha| = |z-h-1| \leq |z|+2$ dir ve yine integrand sınırlıdır. Bu nedenle $h \to 0$ iken

$$\frac{\Gamma(z-h)\Gamma(h)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{h} + \int_0^1 \left[(1-t)^{z-h-1} - 1\right] t^{h-1}\, dt + o(1)$$

elde edilir.

Sol yanda $h=0$ noktasında $h \to \Gamma(z-h)$ için Taylor açılımı ve $h \to \Gamma(h)$ için Laurent açılımı kullanılırsa, $\{\ \}$ ile $\Gamma(h)$ için $h=0$ merkezli Laurent serisi gösterilmek üzere

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\left(\Gamma(z) - h\Gamma'(z) + \cdots\right)\left\{\frac{1}{h} + A + Bh + \cdots\right\}$$

yazalım. Sağ ve sol yandaki sabit terimler eşitlenirse

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^1 \left(1-(1-t)^{z-1}\right) t^{-1}\, dt - A \qquad x > 0$$

bulunur. $t^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-t)^n$ yazılırsa,

$$\int_0^1 \sum_n \left[(1-t)^n - (1-t)^{n+z-1}\right]\, dt - A$$

olur. $[\ ]$ içindeki ifade $\frac{(1-t)^n\left(1-(1-t)^{z-1}\right)}{t} t$ ye eşittir ve $(1-t)^n Kt$ ile sınırlıdır. Bu nedenle $\int$ ve $\sum\limits_n$ yer değiştirebilir. Böylece

$$\begin{aligned}
& \sum_n \int_0^1 \left[(1-t)^n - (1-t)^{n+z-1}\right]\, dt - A \\
= & \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z}\right) - A = 1 - \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z}\right) - A \\
= & \sum_n^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z}\right) - A \\
= & -\frac{1}{z} + \sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right) - A
\end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{1}{z} = \sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right) - A$$

bulunur. Bu ifade

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \qquad C = sabit$$

sonsuz çarpımının logaritmik türevinden başka birşey değildir.

$z = 1$ yazılırsa,

$$1 = e^{C}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}$$

bulunur. Buradan

$$1 = e^{C}\lim_{N\to\infty}\left((N+1)\,e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}\right)}\right)$$

ve böylece

$$0 = C + \lim_{N\to\infty}\left(\log\left(N+1\right) - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{N}\right) = C - \gamma$$

bulunur. Bu durumda

$$C = \text{Euler sabiti } \gamma$$

çıkar.