18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

Ders #19: Normal Aileler

(Ders kitabındaki 219-227. sayfalar yerine)

Teorem 1 *$\Omega \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve her kompakt $E \subset \Omega$ için E üzerinde düzgün sınırlı olacak biçimde, Ω üzerindeki holomorfik fonksiyonların bir ailesi $\mathcal{F}$ olsun. Bu halde, $\mathcal{F}$ fonksiyon ailesi Ω nın her kompakt alt kümesi üzerinde düzgün yakınsayan bir alt diziye sahiptir.*

İlk olarak her kompakt $E \subset \Omega$ için $\mathcal{F}$ ailesi eş süreklidir. Bunun anlamı, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $f \in \mathcal{F}$ için

$$|z' - z''| < \delta, z', z'' \in E \text{ iken } |f(z') - f(z'')| < \varepsilon \tag{1}$$

gerçeklenecek biçimde, bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$x \to d(x, \mathbb{C} - \Omega)$ uzaklık fonksiyonu süreklidir ve kompakt E kümesi üzerinde pozitif olan bir minimuma sahiptir. $F = \bigcup\limits_{x \in E} D(x, 2d)$ nin kapanışı $\overline{F} \subset \Omega$ olacak biçimde (D diski göstermek üzere) $d > 0$ olsun.

$z', z'' \in E$ noktaları

$$|z' - z''| < d$$

gerçeklesin ve γ ile

$$\gamma : |z - z'| = 2d$$

çemberini gösterelim.

Bu durumda $\gamma \subset \overline{F}$ ve z', z'' noktalarının her ikisi de γ nın içindedir. Aynı zamanda $\zeta \in \gamma$ için $|\zeta - z'| = 2d$, $\left|\zeta - z''\right| \geq d$ dir.

Cauchy formülünden $f \in \mathcal{F}$ için

$$f(z') - f(z'') = \frac{z' - z''}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z')(\zeta - z'')} d\zeta$$

yazılabilir. f nin $\overline{F}$ deki maksimum değeri $M\left(\overline{F}\right)$ ise

$$|f(z') - f(z'')| = |z' - z''| \frac{M\left(\overline{F}\right)}{d}$$

olur. Böylece (1) gösterilmiş olur.

Teorem 1 in ispatını tamamlamak için Ω da yoğun olan herhangi bir (z_j) dizisini seçelim. $\mathcal{F}$ de herhangi bir dizi f_m olsun. $f_m(z_1)$ sınırlıdır ve bu nedenle f_m dizisinin z_1 noktasında yakınsayan bir $f_{m,1}$ alt dizisi vardır. Benzer biçimde, $f_{m,1}$ alt dizisinin z_2 de yakınsayan bir $f_{m,2}$ alt dizisini alalım. Bu şekilde devam ederek, $f_{m,m}$ alt dizisinin her z_j noktasında yakınsadığını görürüz.

İspatın birinci kısmından, $\mathcal{F}$ ailesi $\overline{F}$ kompakt kümesi üzerinde eş süreklidir. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $z', z'' \in \overline{F}, f \in \mathcal{F}$ için (1) gerçeklenecek biçimde bir $\delta < d$ vardır. $z \in E$ ise $D(z, \delta)$ diski içinde, $z \in D(z_j, \delta)$ olacak biçimde, z_j noktaları vardır.

E nin kompaktlığından, $z_{1,} \cdots, z_p$ noktaları için

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{p} D(z_j, \delta)$$

dir. Böylece $z \in E$ verildiğinde $|z - z_i(z)| < \delta$ olacak biçimde bir $z_i = z_i(z)$ vardır. Bu nedenle $z_i(z) \in \overline{F}$ dir. Böylece $\overline{F}$ için (1) den,

$$|f(z) - f(z_i(z))| < \varepsilon \qquad f \in \mathcal{F} \tag{2}$$

olur.

$$|f_{r,r}(z_i) - f_{s,s}(z_i)| < \varepsilon \qquad 1 \leq i \leq p, r, s > N \tag{3}$$

olacak biçimde bir $N > 0$ sayısı vardır.

$z \in E$ verildiğinde, $z_i = z_i(z)$ için (2) ve (3) den

$$\begin{aligned} |f_{r,r}(z) - f_{s,s}(z)| &\leq |f_{r,r}(z) - f_{r,r}(z_i)| + |f_{r,r}(z_i) - f_{s,s}(z_i)| + |f_{s,s}(z_i) - f_{s,s}(z_i)| \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Böylece E üzerindeki düzgün yakınsaklık kanıtlanmış olur.

Uyarı: Ders kitabındaki sayfa 223 de yanlışlıkla $\zeta_k \in E$ varsayılmış (ve kullanılmıştır). Bu hata birçok ders kitabında vardır.