Ders #2: Üstel Fonksiyon ve Kompleks Değişkenler için Logaritma Fonksiyonu

(Ders kitabındaki 10-20. sayfalar yerine)

Analiz I dersinde, $b > 1$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$b^x = \sup_{t \in \mathbb{Q},\ t \leq x} b^t$$

biçiminde tanımlanmıştı. Bunu kullanarak

$$b^{x+y} = b^x b^y$$

formülünü ispatlamak zordur. Bunu kolayca ispatlamak için b^x in başka bir ifadesini elde edelim:

$$L(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t},\ x > 0$$

olsun. Bu durumda

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

ve

$$L'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

olduğu görülür. O halde, $L(x)$ in

$$E(L(x)) = x$$

gerçeklenecek biçimde bir $E(x)$ ters fonksiyonu vardır. Analiz I dersinde

$$E'(L(x))L'(x) = 1$$

ispatlandığından

$$E'(L(x)) = x$$

bulunur. $y = L(x)$ denirse, $x = E(y)$ olur ve

$$E'(y) = E(y)$$

elde edilir. $E(0)=1$ olduğu kolayca görülür. Seri gösterilişinin tekliğinden,

$$E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \text{ ve } E(1) = e$$

çıkar.

Teorem 1 *Her $x \in \mathbb{R}$ için $b^x = E(xL(b))$ dir.*

İspat: $u = L(x)$ ve $v = L(y)$ olsun. Bu durumda

$$E(u+v) = E(L(x)+L(y)) = E(L(xy)) = xy = E(u)E(v),$$

$$E(n) = E(1)^n = e^n$$

olur. $t = \dfrac{n}{m}$ denirse,

$$E(t)^m = E(mt) = E(n) = e^n$$

bulunur. Böylece,

$$E(t) = e^t \quad (t \in \mathbb{Q}, t > 0)$$

olur. Öte yandan E fonksiyonu

$$E(t)E(-t) = 1$$

eşitliğini gerçeklediğinden

$$E(t) = e^t, \quad t \in \mathbb{Q}$$

elde edilir. Ayrıca

$$b^n = E(nL(b))$$

ve

$$b^{\frac{1}{m}} = E(\frac{1}{m}L(b))$$

dir. Bu son iki ifadenin m inci kuvvetleri aynı olduğundan,

$$\left(b^{\frac{1}{m}}\right)^n = b^{\frac{n}{m}} = E\left(\frac{1}{m}L(b)\right)^n = E(\frac{n}{m}L(b))$$

ve

$$b^t = E(tL(b)), \quad t \in \mathbb{Q}$$

olur. $E(x)$ sürekli olduğundan, $x \in \mathbb{R}$ için

$$b^x = \sup_{t\in\mathbb{Q},\ t\leq x} \left(b^t\right) = \sup_{t\in\mathbb{Q},\ t\leq x} E(tL(b)) = E(xL(b))$$

çıkar. ■

Sonuç 1 *Her $b > 0$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ için $b^{x+y} = b^x b^y$ dir.*

Özel olarak $e^x = E(x)$ olduğundan yukarıdaki seri gösterilişinden şu ilginç formül elde edilir:

$$\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots\right)^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

e^x için yukarıdaki formül $z \in \mathbb{C}$ için e^z nin yakınsaklığı apaçık olan aşağıdaki seri biçiminde

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

tanımlanabileceğini akla getirir.

Önerme 1 *Her $z, w \in \mathbb{C}$ için $e^{z+w} = e^z e^w$ dir.*

İspat: $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(t) = e^{tz+w} \text{ ve } g(t) = e^{tz}e^w$$

fonksiyonlarını gözönüne alalım. e^{tz+w} ve e^{tz} nin seri açılımları t ye göre terim terime türetilirse,

$$\frac{df}{dt} = zf(t),\ \frac{dg}{dt} = zg(t)$$

ve

$$f(0) = e^w,\ g(0) = e^w$$

bulunur. Bu denklemlerin tek türlü belirli oluşundan, $f \equiv g$ sonucu çıkar. Böylece, $f(1) = g(1)$ bulunur. ■

Ayrıca $t \in \mathbb{R}$ ise

$$e^{it}e^{-it} = 1 \text{ ve } (e^{it})^{-1} = e^{-it}$$

olur. Buradan

$$\left|e^{it}\right| = 1$$

olduğu görülür. Şu halde e^{it} birim çember üzerindedir.

Öte yandan,

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = 1 - \frac{t^2}{2} + \cdots, \\ \sin t &= \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = t - \frac{t^3}{2} + \cdots. \end{aligned}$$

gösterilişlerinden, iyi bilinen $e^{it} = \cos t + i \sin t$ geometrik ifadesinin doğruluğunu bir kez daha kanıtlanmış oluruz. Dikkat edilirse, $e^{it}(t \in \mathbb{R})$ birim çemberi tümüyle doldurur. Ara değer teoreminden, $\{\cos t \mid t \in \mathbb{R}\}$ kümesi $[-1, 1]$ aralığını tümüyle doldurur. Bu nedenle de $e^{it} = \cos t + i \sin t$, uygun bir t için birim çember üzerinde bir noktadır.

Dikkat edilirse, $z \mapsto e^z$ dönüşümü 0 dışındaki tüm $w \in \mathbb{C}$ kompleks değerleri alır. Gerçekten her $z \in \mathbb{C}$ için

$$w = e^z = e^x \cdot e^{iy}, \quad z = x + iy$$

dir. Burada

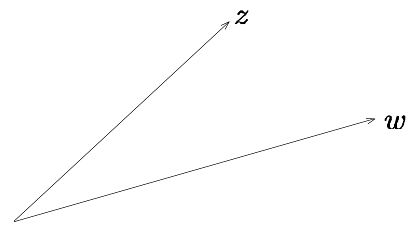
$$e^x = |w| \text{ ve } e^{iy} = \frac{w}{|w|}$$

olacak biçimde x ile y seçilirse $e^z = w$ olur. Böylece,

$z = |z|\, e^{i\varphi}$ ve $w = |w|\, e^{i\psi}$ ise

$$\begin{aligned} zw &= |z|\,|w|\, e^{i(\varphi+\psi)} \\ &= |z|\,|w|\,(\cos(\varphi+\psi) + i \sin(\varphi+\psi)) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son formül z ve w kompleks sayılarının çarpımının geometrik yorumunu verir.



Şekil 2.1

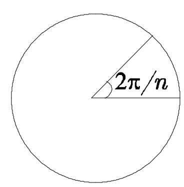
Buradan da aşağıdaki çok kullanılan formül elde edilir:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Teorem 2 *$z^n = 1$ denkleminin kökleri $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ olmak üzere*

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$$

dir.



Şekil 2.2

Çok kullanılan bazı kompleks sayı kümelerinin geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:

$\lvert z-a\rvert = r$	$\longleftrightarrow$	çember
$\lvert z-a\rvert + \lvert z-b\rvert = r,\ (\lvert a-b\rvert < r)$	$\longleftrightarrow$	elips
$\lvert z-a\rvert = \lvert z-b\rvert$	$\longleftrightarrow$	dik açı ortay
$\{z \mid z = a + tb, t \in \mathbb{R}\}$	$\longleftrightarrow$	doğru
$\{z \mid \operatorname{Im} z < 0\}$	$\longleftrightarrow$	alt yarı düzlem
$\{z \mid \operatorname{Im}\left(\dfrac{z-a}{b}\right) < 0\}$	$\longleftrightarrow$	yarı düzlem

$x \in \mathbb{R}$ iken $x \mapsto e^x$ dönüşümünün tersi vardır. $z \in \mathbb{C}$ iken $z \mapsto e^z$ dönüşümünün tersi **YOKTUR**. Çünkü,

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

dir ve bu nedenle de e^z nin tersi yoktur. Üstelik, $w \neq 0$ için

$$e^z = w$$

denkleminin sonsuz sayıda çözümü vardır:

$$e^x = |w|\,, e^{iy} = \frac{w}{|w|} \Rightarrow x = \log|w|\,, y = \arg(w).$$

Buradan

$$\log w = \log|w| + i\arg(w)$$

sonsuz çoklukta değer alır ve bu nedenle de bir fonksiyon değildir.

$Arg(w)$ yi $(-\pi, \pi)$ aralığındaki

$$Arg(w) \triangleq w \text{ nin esas açısı}$$

olacak biçimde tanımlarsak, logaritmanın esas değeri

$$Log(w) \triangleq \log|w| + iArg(w)$$

olur. $Log(w)$ nin tanım kümesi yarıklı düzlemdir (negatif reel eksenin çıkarılmasıyla elde edilen düzlem). Ayrıca

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$$

dir. Eşitliğin her iki tarafı da aynı sonsuz çoklukta değerleri alır. Daha ayrıntılı olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3 *Yarıklı düzlemde*

$$Log\,(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2) + n \cdot 2\pi i \quad n = 0 \text{ veya } \pm 1$$

ve $-\pi < Arg(z_1) + Arg(z_2) < \pi$ *ise* $n = 0$ *dır. Özel olarak* $z_1 > 0$ *ise* $n = 0$ *olur.*

İspat: $Arg(z_1), Arg(z_2)$ ve $Arg(z_1z_2)$ $(-\pi, \pi)$ aralığında olduğundan

$$-\pi - \pi - \pi < Arg(z_1) + Arg(z_2) - Arg(z_1z_2) < \pi + \pi + \pi$$

dir. Fakat

$$Arg(z_1) + Arg(z_2) - Arg(z_1z_2) = n \cdot 2\pi$$

eşitliği gerçeklendiğinden

$$|n| \leq 1$$

bulunur.

$$|Arg(z_1z_2)| < \pi$$

olduğundan

$$|Arg(z_1) + Arg(z_2)| < \pi$$

ise, farkları 2π nin bir katı olduğundan, $Arg(z_1) + Arg(z_2) = Arg(z_1z_2)$ olur. ■